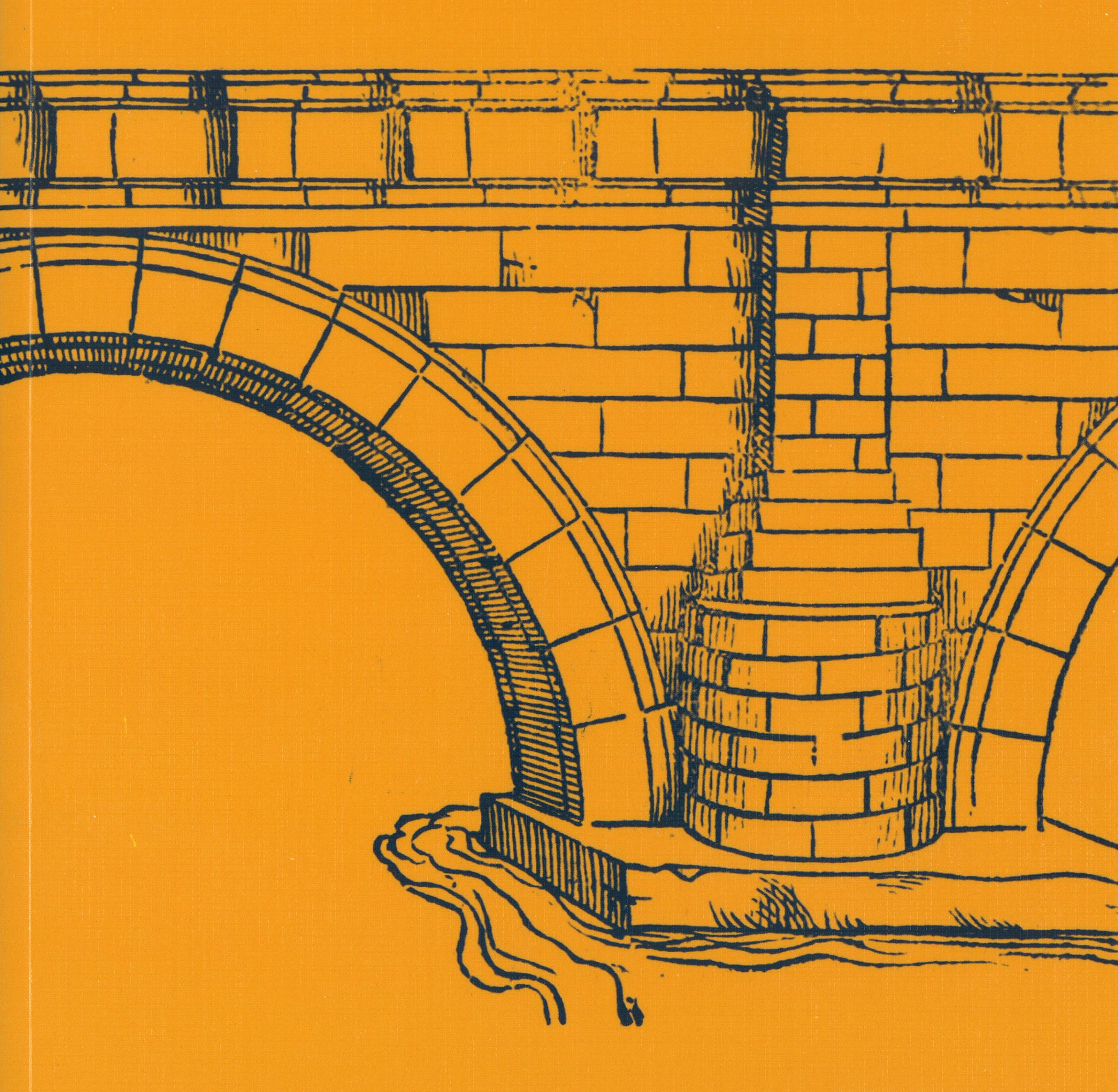
El arco de fábrica

Jacques Heyman



Instituto Juan de Herrera
Escuela Técnica Superior
de Arquitectura de Madrid

El profesor Heyman es uno de los grandes teóricos de la Teoría de Estructuras. En los años 1940 y 50 contribuyó decisivamente al establecimiento de la Teoría Plástica de las estructuras de acero. En los años 1960, dirigió su atención a las estructuras históricas de fábrica. Demostró que éstas también eran "plásticas" y que la teoría y los Teoremas Fundamentales podían traducirse a la fábrica. El profesor Heyman extrajo el principal corolario del Teorema de la Seguridad: el "enfoque del equilibrio". Cualquier estructura de fábrica no se caerá si existe un posible estado de equilibrio confortable a compresión. Esto impone ciertas restricciones a la geometría: es la forma la que garantiza la estabilidad de un arco, una bóveda o un edificio.

En el presente libro el profesor Heyman estudia con detalle la teoría del arco fábrica. El arco es la base de toda la construcción de fábrica. Cualquier estructura, por compleja que sea, puede imaginarse como una serie de arcos en equilibrio que empujan contra un sistema de contrarresto. El caso más complejo es cuando el arco no sólo debe soportar su propio peso sino, además, la acción de una carga variable en magnitud y/o posición. Los puentes en arco, construidos desde la antigüedad, son el ejemplo más común. Primero se exponen los fundamentos teóricos y se explican una serie de métodos de equilibrio, basados en el concepto de línea de empujes. El empleo de los polígonos funiculares y de fuerzas es la herramienta básica. Se define con rigor la seguridad geométrica por comparación con el arco límite. Después, se aplican estas ideas al análisis de un arco sometido a cargas concentradas, deduciéndose un método sencillo para hallar el espesor límite para la combinación más desfavorable de carga permanente y sobrecargas. Se propone un método rápido de análisis y se dan las tablas correspondientes, aplicándose ambos métodos a varios ejemplos de puentes.

El libro termina con un capítulo dedicado a los arcos de hierro. El profesor Heyman muestra cómo la misma teoría de equilibrio puede aplicarse a los arcos de hierro, fundido o forjado. Los análisis elásticos de arcos llevan a grandes tensiones, fruto de variaciones de las condiciones de contorno o de la temperatura, que no son reales. Sólo el análisis de equilibrio, basado en el Teorema Fundamental de la Seguridad, permite una estudio racional de los arcos reales.

Textos sobre Teoría e Historia de las Construcciones
Colección dirigida por Santiago Huerta Fernández

A. Buchanan et al. (Eds.). **Robert Willis. Science, Technology and Architecture in the Nineteenth Century**
A. Choisy. **El arte de construir en Roma**
A. Choisy. **El arte de construir en Bizancio**
A. Choisy. **El arte de construir en Egipto**
A. Choisy. **Historia de la arquitectura** (en preparación)
P. Fuentes e I. Wouters (Eds.). **Brick Vaults and Beyond. Transformation of a Historical Structural System**
I. J. Gil Crespo (Ed.). **Historia, arquitectura y construcción fortificada**
J. Girón y S. Huerta (Eds.) **Auguste Choisy (1841-1909). L'architecture et l'art de bâtir**
R. Guastavino. **Escritos sobre la construcción cohesiva y su función en la arquitectura**
J. Heyman. **Análisis de estructuras: un estudio histórico**
J. Heyman. **El arco de fábrica**
J. Heyman. **El esqueleto de piedra. Mecánica de la arquitectura de fábrica**
J. Heyman. **Equilibrio de cáscaras** (en preparación)
J. Heyman. **Geometry and Mechanics of Historic Structures**
J. Heyman. **La ciencia de las estructuras**
J. Heyman. **Teoría básica de estructuras**
J. Heyman. **Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica. 2 vols.**
J. Heyman. **Vigas y pórticos**
S. Huerta. **Arcos, bóvedas y cúpulas. Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica**
S. Huerta (Ed.). **Las bóvedas de Guastavino en América**
S. Huerta (Ed.). **History of the Theory of Structures. Essays in Honour of Jacques Heyman**
J. Ibáñez (Coord., Ed.). **Trazas, muestras y modelos de tradición gótica en la Península Ibérica entre los siglos XIII y XVI**
J. M. Molero et al. (Eds.). **La construcción fortificada medieval**
J. Monasterio. **Nueva teórica sobre el empuje de las bóvedas** (en preparación)
J. R. Perronet. **La construcción de puentes en el siglo XVIII**
H. Straub. **Historia de la ingeniería de la construcción** (en preparación)
G. E. Street. **La arquitectura gótica en España**
H. Thunnissen. **Bóvedas: su construcción y empleo en la arquitectura**
A. Truñó. **Construcción de bóvedas tabicadas**
E. Viollet-le-Duc. **La construcción medieval**
R. Willis. **La construcción de las bóvedas en la Edad Media**

El arco de fábrica

El arco de fábrica

Jacques Heyman

traducción de:
Paula Fuentes

revisión y prólogo de:
Santiago Huerta

Instituto Juan de Herrera
Escuela Técnica Superior de Arquitectura
Madrid

Edición y traducción íntegra de la edición original:
J. Heyman, *The masonry arch.* Chichester: Ellis Horwood, 1982.

ISBN: 978-84-9728-586-5
Depósito Legal: M-1135-2021
Cubierta: Puente de Sant'Angelo, Roma (detalle). S. Serlio.
Libro terzo d'architettura. Venecia: 1540
Fotocomposición e impresión:
GRACEL ASOCIADOS SLL
28018 Alcobendas
Distribución y venta: librosjuandeherrera.wordpress.com

Índice

Prólogo

El arco nunca duerme.
Proverbio árabe

El arco es la base de toda la construcción de fábrica. Si se conoce bien la teoría del arco de fábrica se ha dado el paso fundamental a la hora de analizar cualquier estructura de este material. No es extraño por tanto que las primeras contribuciones a la ciencia de las estructuras se ocuparan de la teoría del arco. La teoría tradicional se basaba en el examen crítico de la experiencia acumulada y las primeras reglas eran proporcionales, se centraban en la geometría. Después, en los siglos XVII al XIX se desarrolló la teoría "científica" del arco de fábrica. Esta teoría se olvidó con la aparición de los nuevos materiales: primero, el hierro fundido, luego el hierro forjado y el acero; finalmente, el hormigón armado. La teoría clásica de estructuras, desarrollada en el siglo XIX, considera estos materiales como elásticos y, así, el arco de fábrica se estudió desde finales del siglo XIX como un arco elástico. Desde luego hace falta mucha imaginación para ver en un arco de fábrica (de piedra, ladrillo u hormigón en masa, normalmente agrietado) un sólido elástico homogéneo e isótropo, con unas constante elásticas determinadas. Pero un análisis elástico es una posible solución de equilibrio y, si se verifica la "regla del tercio", si la línea de empujes no produce tensiones elásticas de tracción, el cálculo es seguro, aunque los ingenieros de fines del XIX y principios del XX no lo sabían. (En la práctica, un cálculo gráfico buscaba situar una línea de empujes dentro del tercio central.) Cuando a partir de los años 1920 del siglo pasado hubo que estimar la resistencia de los puentes con arcos de fábrica para el paso de los nuevos vehículos, mucho más pesados, se hizo evidente la necesidad de revisar este enfoque elástico. Finalmente, fue en los años 1960 cuando el profesor Heyman tradujo la teoría plástica al caso de los arcos de fábrica y de las estructuras de fábrica en general,

proporcionando un marco teórico riguroso para el análisis de las estructuras históricas de fábrica.

Este libro, que ahora traducimos y publicamos en español, resume con concisión, claridad y brillantez toda la teoría del arco de fábrica. Es cierto que el análisis de arcos presenta una casuística enorme; el técnico en estructuras, aplicará la teoría en cada situación de la manera más conveniente. No hay que olvidar que el propósito del técnico, sea arquitecto o ingeniero, no es avanzar en el conocimiento sino dar respuesta a problemas concretos. Pero para dar esta respuesta es preciso antes dominar la teoría del arco, comprender sus principios fundamentales y conocer sus métodos básicos de análisis. Esta monografía del profesor Heyman cubrirá un vacío en la literatura en español sobre el análisis del arco de fábrica. El libro se concentra en los arcos de puentes, es decir, arcos que deben soportar el paso de una carga, o de una serie de cargas, concentradas. Pero la exposición va mucho más allá, pues el libro explica la teoría completa de arcos.

Esperamos que esta traducción, que se ha hecho esperar varios decenios, sirva tanto a arquitectos como a ingenieros para estudiar y entender con rigor el funcionamiento del arco de fábrica. El trabajo del arco no es, ni mucho menos, evidente. Los ingenieros del siglo XVIII decían que el arco es "el enigma de la arquitectura". En efecto, es imposible saber el estado real de un arco (de hecho, de cualquier estructura); lo único que se sabe es que el arco de fábrica siempre empuja, también de noche, como dice el proverbio árabe que figura al comienzo de este prólogo. "El arco nunca duerme", y no solamente empuja siempre, sino que, además, se agrieta y acomoda su empuje a los cambios inevitables en las condiciones de contorno. Parafraseando al profesor Heyman, en un mundo esencialmente variable, de estructuras que se mueven y adaptan a cada cambio del entorno, lo único seguro, la única roca a la que agarrarse, es la teoría, en este caso la teoría plástica.

Madrid, 14 de enero de 2021
Santiago Huerta

Prefacio

Quizá la parte más inesperada de este libro es su último capítulo, donde se intenta hacer uso de toda la teoría del arco de fábrica para comprender los arcos construidos en hierro fundido o forjado. Espero que, a medida que se desarrolle la teoría, se aclare cómo se pueden aplicar las técnicas desarrolladas para las estructuras de piedra a las de hierro.

Esa teoría se introduce en el primer capítulo con referencia a ideas bien conocidas sobre la línea de empujes; el equilibrio se explica del modo convencional y se hace referencia a la regla del tercio central. En el segundo capítulo la teoría se pone en el contexto de las ideas procedentes de los teoremas de la plasticidad, dándole al trabajo un cierto rigor académico. Se puede alcanzar un conocimiento más profundo del comportamiento del arco estudiando, aunque sea superficialmente, la historia de la teoría del análisis técnico de puentes; en cualquier caso, el tercer capítulo ofrece un breve resumen. En otras partes se pueden encontrar historias más completas, y mi exposición en *Coulomb's Memoir on Statics* da más información.

Esta manera de presentar el material podría considerarse la del historiador «whig». En primer lugar, se da la visión «correcta», y después se interpretan las evidencias históricas a la luz de esta visión correcta. Los ingenieros o arquitectos que abordan el problema del arco de fábrica se ven en apuros para llegar a un objetivo conocido, algunos lo logran, y otros parece que evitan obstinadamente el verdadero camino. A la acusación de que estoy dando una visión distorsionada de las evidencias sólo puedo responder que todas las perlas históricas deben enhebrarse en un hilo, para lograr un collar a la vez fuerte, y con suerte, hermoso. Mi hilo es el de la teoría plástica.

Es en el cuarto capítulo, donde se contrastan completamente los métodos plásticos con los métodos elásticos de análisis en un arco de fábrica real, y se desarrollan técnicas para el cálculo de arcos existentes que serán, espero, de utilidad para los interesados en el mantenimiento y la rehabilitación de estas estructuras. En el capítulo cinco se dan ejemplos de cómo usar estos métodos. Estos dos capítulos concluyen en realidad esta monografía.

Sin embargo, el breve capítulo sexto, no pretende ser de relleno. Trata de mostrar que las ideas desarrolladas para el arco de fábrica se pueden usar más ampliamente, y que, de hecho, los métodos basados firmemente en los principios de la plasticidad tienden a tener una validez universal. Se trata de un tema técnico. La regla del tercio central se sustituye aquí por el concepto, equivalente pero más amplio, de coeficiente geométrico de seguridad. Esto permite generar soluciones para arcos a pesar de que se descarta una de las tres ecuaciones principales del análisis de estructuras. La ecuación que expresa la geometría deformada no es necesaria. En su lugar, las ecuaciones de equilibrio son suficientes para determinar la seguridad de los arcos; se le recuerda al técnico su principal tarea: construir un estado de equilibrio, posible y satisfactorio en el que basar el proyecto.

A veces es necesario recordarle esto al ingeniero. Su pensamiento puede estar tan condicionado por los conceptos convencionales de la teoría elástica que no siempre es consciente de las limitaciones de sus cálculos. La teoría elástica genera, de hecho, un estado posible de equilibrio de la estructura, pero es sólo uno entre infinitos para cualquier estructura estáticamente indeterminada (hiperéstatica). Detrás de la la teoría elástica y los programas de ordenador de elementos finitos basados en ella, se esconden las ideas de compatibilidad de deformaciones. El ingeniero se ve obligado a suministrar información, por ejemplo, sobre las condiciones de los apoyos de un arco, antes de poder realizar el análisis elástico.

Tal y como se señala en el capítulo 2, el técnico no conoce las condiciones de los apoyos, ni sabe si la estructura fue forzada durante la construcción, de manera que haya tensiones incluso en ausencia de carga. Supondrá, para que el programa funcione, que la estructura no tiene tensiones iniciales, y que los apoyos son rígidos (o que tienen una cierta respuesta elástica); pero se trata de supuestos de validez desconocida que, sin embargo, pueden tener un efecto relevante en los resultados producidos por el ordenador.

El análisis de los arcos mediante la teoría plástica muestra que su seguridad no depende en realidad de las condiciones precisas de los apoyos, ni de si los arcos se construyeron originalmente perfectamente encajados entre esos apoyos. El calculista no necesita información sobre estas imperfecciones geométricas; tiene un método de análisis alternativo, que es siempre, según los teoremas de la plasticidad, seguro. Y el método se puede aplicar tanto al arco de fábrica como al de hierro.

1
La regla del tercio central

En 1746 William Edwards, cantero, fue contratado para construir por 500 libras un puente sobre el río Taff en Pontypridd. Sus intentos para cumplir con este contrato ilustran algunas de las dificultades que tiene que afrontar el proyectista de arcos de fábrica.

El primer puente tenía tres o cuatro vanos, y se mantuvo en pie durante dos años y dos meses. Una de las pilas (al menos) estaba en el río, y una riada derribó el puente, probablemente como resultado del lavado de la cimentación. William Edwards, a quien se pedía en el contrato construir un puente que se mantuviera en pie siete años, decidió entonces salvar el río con un solo vano (de una luz de algo más de 42 m). Cuando el arco estaba casi terminado, la cimbra de madera colapsó, bien porque el peso de la fábrica era excesivo, o bien porque una riada produjo de nuevo una carga imprevista.

El tercer puente, de 1754, se construyó con una fábrica más ligera sobre una cimbra más resistente. El arco se completó en septiembre y la cimbra se retiró; los trabajos continuaron construyendo los tímpanos y los rellenos de los riñones para construir la calzada. Mientras se realizaban estos trabajos, en noviembre, el arco colapsó por elevación de la clave. El motivo no fue el fallo de los contrarrestos del arco, o la sobretensión de la fábrica; al parecer el arco tenía una *forma* incorrecta para soportar su propio peso.

William Edwards aprendió del colapso, y modificó el proyecto del cuarto y último puente, que todavía está en pie. Se aumentó la carga en la clave, y la de los riñones se aligeró abriendo grandes huecos cilíndricos (figura 1.1). La estructura

resultante es un arco muy esbelto, con un espesor de sólo unos 760 mm en la clave y muy poco más en los riñones, que están perforados por huecos cilíndricos. (El pretil hace que en alzado el puente parezca más masivo de lo que en realidad es.) Se trata de una estructura muy esbelta y podría parecer que su margen de seguridad es pequeño; no resulta sorpredente que el tercer arco colapsara durante su construcción.

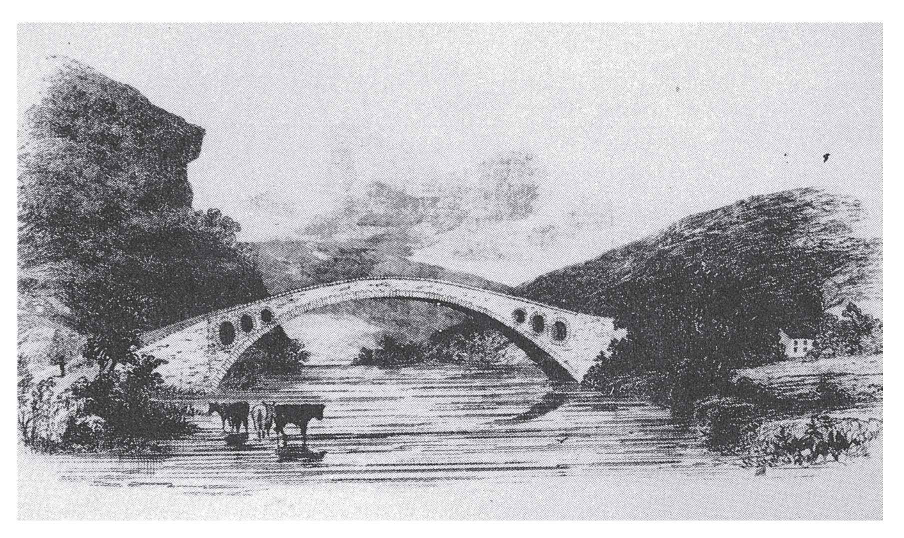


Figura 1.1 Cuarto puente de William Edwards en Pontypridd

La expresión «margen de seguridad» es vaga; aunque el significado de la frase anterior puede ser claro, no se le puede atribuir un peso numérico preciso a la expresión tal como está. Si el tercer puente colapsó como se ha descrito, por una gran dislocación sin una sobretensión inicial del material, cualquier estimación de la «seguridad» del puente no dependerá (al menos no de manera importante) de la resistencia del material. En cambio, la seguridad del arco tal vez podría expresarse en términos de su forma; el problema será de geometría, y no de «tensiones y deformaciones», propias de la teoría moderna de estructuras.

Como se verá, el enfoque geométrico en el estudio de los arcos tiene precedentes históricos respetables. El propósito de este libro es construir una teoría sobre estos precedentes, usando cuando sea necesario las técnicas recientes de análisis, y tratar de establecer una teoría del arco de fábrica basada en gran medida en la geo-

metría. Las suposiciones necesarias para el análisis se enunciarán a su debido tiempo. En términos sencillos, los arcos estudiados tienen un tamaño modesto, de manera que no hay un problema de rotura del material; un arco de cualquier piedra razonable, construido con o sin mortero, puede soportar cómodamente las cargas impuestas. Además, no se discutirá el cálculo de los estribos del arco; se supondrá que son suficientes para resistir, aunque no necesariamente con una rigidez absoluta, cualquier empuje impuesto.

La investigación se ocupa entonces del propio arco: ¿Cuál es la mejor forma del arco para las cargas dadas? ¿Cómo de gruesa debe ser la rosca del arco? ¿Qué cargas puede soportar un determinado puente medieval?

Definiciones

Un arco de fábrica se construye sobre una estructura provisional o cimbra. Esta cimbra es tradicionalmente de madera, y se debe prever, mediante cuñas u otro elemento similar, la retirada de esta estructura una vez que el arco se ha completado.

La propia rosca del arco, que constituye el componente estructural básico del puente, se compone de dovelas con forma de cuña (figura 1.2). En un arco de gran luz, las dovelas se cortarán cuidadosamente y se colocarán con un mínimo de mortero; para arcos más pequeños se pueden usar piedras labradas toscamente, con juntas más gruesas de mortero que atiendan a las irregularidades de la construcción.

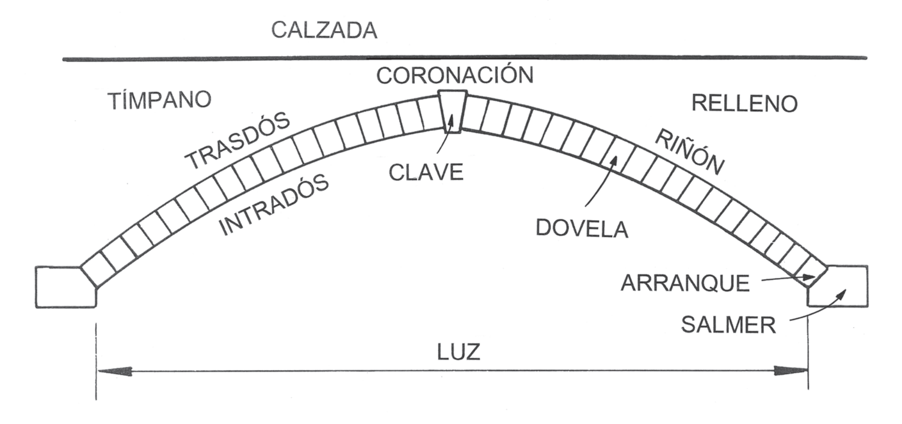


Figura 1.2 Partes de un puente fábrica

En el caso de Pontypridd, las dovelas son muy finas (figura 1.3), y apenas necesitan la forma de cuña para formar la ligera curvatura del arco.



Figura 1.3 Dovelas y parapeto del puente de Pontypridd (fotografía de Tedd Ruddock, por cortesía de Cambridge University Press)

Por el contrario, un puente en arco de dovelas corriente tiene una rosca formada por piedras relativamente gruesas. La figura 1.4 muestra el puente del Clare College, proyectado en 1638. La clave tiene una relevancia constructiva especial; es la última piedra colocada y, terminado el arco, es posible retirar la cimbra. Debido a esta función constructiva, con frecuencia el proyectista resalta la clave, pero no siempre; de hecho, su función estructural no es diferente a la de las otras dovelas, igual que un eslabón en una cadena de hierro no es diferente de otro eslabón. Los eslabones de la cadena transmiten la tracción a lo largo de la cadena; las dovelas de un arco transmiten la compresión a lo largo del arco. Como se verá, esta ingenua analogía, que puede parecer trivialmente evidente, tiene gran importancia.

Completado el arco, se puede comenzar a retirar la cimbra. Para estabilizar la rosca del arco, habrá que construir sobre el trasdós del arco, en la parte de los estribos (y de las pilas interiores), parte del relleno. No obstante, la mayor parte del peso total del arco de fábrica formará este relleno no estructural para formar la calza-

da, y es también importante descimbrar los arcos antes de que el peso sobre la cimbra lo dificulte. El equilibrio del arco puede ser delicado, y se debe tener cuidado de preservar la simetría y equilibrar las cargas a lo largo de los vanos. El tercer puente en Pontypridd se cargó demasiado en los riñones y poco en la clave. El puente del Clare College, figura 1.4, se construyó evidentemente de una manera desequilibrada, y la pila del lado oeste se inclinó durante la construcción, provocando un descenso de la calzada en el vano central.

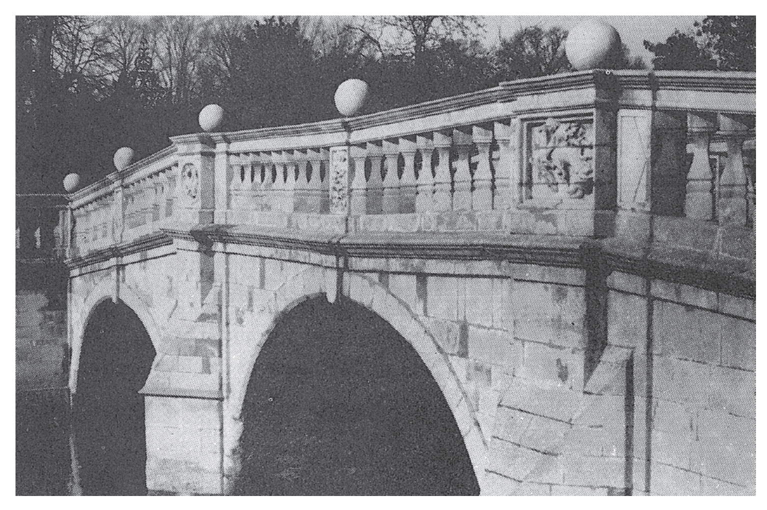


Figura 1.4 Puente del Clare College, Cambridge; Thomas Grumbold, 1638-40. Nótese el descenso de la coronación del vano mayor

En un puente pequeño el relleno puede ser de cascote, tierra, grava o encachado, construido hasta la altura necesaria para sujetar la superficie de la calzada. El relleno queda retenido entre los tímpanos construidos sobre la rosca del arco en las dos caras del puente. El relleno no tiene función estructural pero una carga aplicada en la calzada se distribuye por él hasta alcanzar el trasdós del arco. En puentes más grandes, para soportar la carga de la calzada, se pueden construir sobre los riñones una serie de muros paralelos de fábrica.

El alzado de la figura 1.2 puede tomarse igualmente como la sección de un puente. Las roscas paralelas del arco no son necesariamente independientes; las dovelas tendrán generalmente distinta longitud en el eje del arco, de manera que los arcos vecinos se conectan o enjarjan entre sí para formar una bóveda de cañón

seguido. No se debe suponer que, necesariamente, el espesor visible de la rosca en los paramentos exteriores de un puente representa el espesor del cañón entre las dos caras. Por ejemplo, el arco del puente del Clare College, figura 1.5, parece tener 0,30 m de espesor pero, de hecho, detrás de estas dovelas del paramento exterior, la fábrica está peor cortada y tiene un espesor de sólo 0,15 m. El arco principal tiene en realidad la mitad de espesor de lo que aparenta. En luces más grandes, este tipo de engaño no suele presentarse.



Figura 1.5 Puente del Clare College, Cambridge. Las dovelas exteriores tienen 30 cm de espesor, pero las del cañón principal sólo la mitad de este expesor

Los problemas inmediatos son, entonces, los siguientes. Se conocen la forma y espesor del arco, así como el valor de las cargas, las debidas al peso propio del arco y al relleno, y la sobrecarga debida al tráfico. (Habrá que determinar la «peor» posición de la sobrecarga sobre el puente.) ¿Cómo transmite el puente esas cargas? ¿Cuáles son las fuerzas entre las dovelas? ¿Cuál es el empuje sobre los apoyos? Con métodos que permitan contestar estas preguntas y otras similares, se puede comenzar a evaluar la seguridad de un puente determinado, o proyectar un arco para soportar una determinada carga.

El polígono funicular

El polígono funicular es una herramienta bien conocida para el análisis de los arcos. Su construcción puede explicarse mediante un ejemplo sencillo. La figura 1.6 muestra un conjunto de fuerzas paralelas W_1, W_2 y W_3 (que se interpretarán posteriormente como un sistema de cargas en un puente) junto con dos fuerzas paralelas R_1 y R_2 actuando a través de los puntos A y B. Todo el sistema se supone en equilibrio, de manera que

$$W_1 + W_2 + W_3 = R_1 + R_2 \quad , \tag{1.1}$$

y, hay una segunda ecuación que representa el equilibrio de momentos. Si imaginamos que las fuerzas W actúan sobre un hilo que no pesa (figura 1.7(a)), se puede hallar gráficamente la forma del hilo. Asumiendo que la componente horizontal H de la tracción del hilo es conocida, el triángulo de fuerzas (figura 1.7(b)) da la inclinación del tramo AP del hilo.

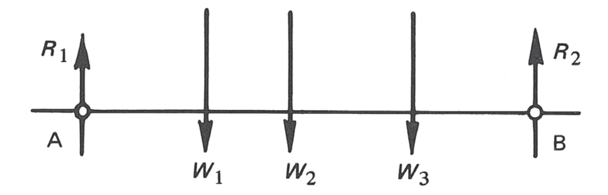


Figura 1.6

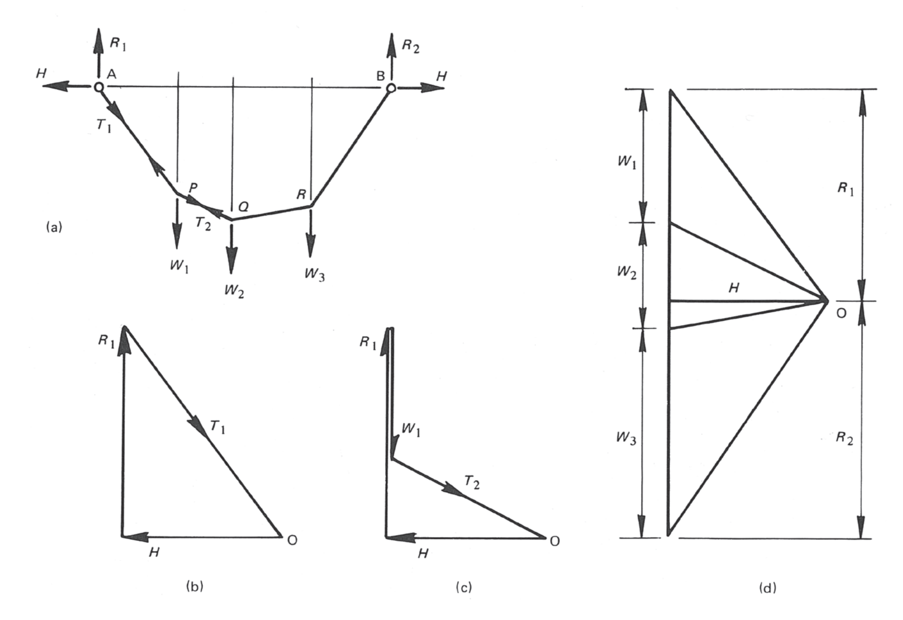
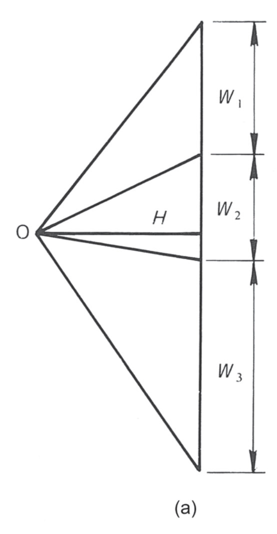


Figura 1.7

En el tramo de hilo PQ actúan la misma fuerza horizontal H y una fuerza vertical ($R_1 - W_1$); la figura 1.7(c) muestra la construcción para hallar la dirección del hilo (y, si se desea, el valor T_2 de la tracción). Las figuras 1.7(b) y (c) se pueden combinar; de hecho, la figura 1.7(d) muestra el polígono de fuerzas completo correspondiente a las cargas W_1, W_2 y W_3 y a las reacciones R_1 y R_2. Para este caso particular de fuerzas paralelas, el polígono de fuerzas es la línea vertical recta que se muestra, junto con la línea horizontal que representa la componente horizontal H de la tracción del hilo. Evidentemente, la construcción de la figura 1.7(d) cumple la ecuación (1.1). El polo O del polígono de fuerzas se sitúa a una distancia H de la línea vertical, y las líneas que salen de O dan las inclinaciones de los diversos tramos del hilo.

Los problemas del hilo colgante y del arco son, desde el punto de vista de la estática, los mismos. La figura 1.8 se corresponde exactamente con las figuras 1.7(d) y (a); como se ve, se podría disponer un conjunto de barras rectas sin peso AP, PQ, QR y RB, articuladas en sus extremos, para transmitir las cargas W_1, W_2 y W_3 a los apoyos A y B, trabajando las barras a compresión (mientras que el hilo correspondiente de la figura 1.7 trabaja a tracción). El conjunto de barras estaría en equili-



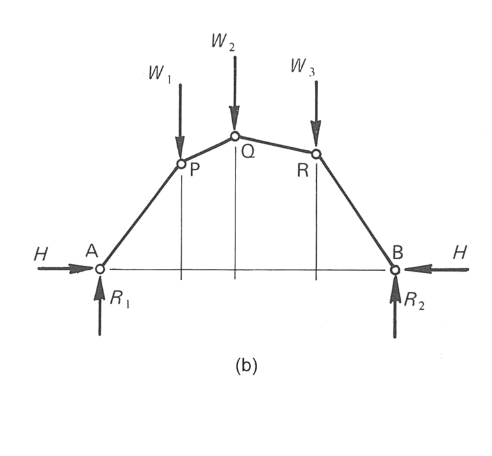


Figura 1.8

brio, pero el equilibrio sería inestable. El polígono de fuerzas APQRB es la línea de empujes de un arco con las cargas W_1, W_2 y W_3; es el grosor de las dovelas que envuelven la línea de empujes lo que confiere estabilidad al arco real.

El polígono funicular de las figuras 1.7(a) y 1.8(b) se ha dibujado suponiendo conocido el valor de la reacción horizontal *H* (tracción en el hilo, compresión en el arco). La figura 1.8 se ha redibujado en la figura 1.9 con otro polígono funicular superpuesto, que corresponde a un valor más pequeño de *H*, digamos *H'*.

Queda claro al estudiar los triángulos de fuerzas, como el de la figura 1.7(b), que el polígono funicular AP'Q'R'B de la figura 1.9(b) es una versión estirada del polígono original APQRB; de hecho, las ordenadas en cualquier sección tienen la proporción *H*/*H'*, es decir

$$\frac{\mathrm{P'p}}{\mathrm{Pp}} = \frac{\mathrm{Q'q}}{\mathrm{Qq}} \dots = \frac{H}{H'} \quad . \tag{1.2}$$

(Desde el punto de vista de la analogía del hilo, un hilo más largo conducirá sus cargas con una fuerza horizontal menor; un arco rebajado empujará con una fuerza mayor sobre sus estribos que uno de mayor altura.)

Para dibujar los polígonos funiculares de las figuras 1.7, 1.8 y 1.9 se han tenido que realizar algunos cálculos preliminares que aseguran que el sistema está en equilibrio; es decir, antes de empezar dibujar ha habido que calcular los valores de las reacciones R_1 y R_2. Que este análisis preliminar no es necesario se muestra en la figura 1.10. Las cargas W_1, W_2 y W_3 tienen los mismos valores, pero el polo O del polígono de fuerzas se ha situado aleatoriamente. El polígono funicular correspondiente APQRS se ha dibujado comenzando por el punto fijo A y, como puede verse, el punto S no coincide con el punto B. Sin embargo, el polígono funicular puede tomar de nuevo la forma de las figuras 1.8 y 1.9, pasando por A y B. Se traza la línea de cierre AS, y la paralela a ésta OX en el polígono de fuerzas define el nivel del polo O' para que el correspondiente polígono funicular pase por A y B. Además, hay que señalar que los polígonos de fuerzas APQRS y AP'Q'R'B están relacionados por un esviaje puro; no hay ningún cambio en las dimensiones verticales de los dos polígonos.

Las figuras 1.9 y 1.10 muestran, en su conjunto, un método gráfico completo para dibujar un polígono funicular que pase por tres puntos dados. Si, además de por los puntos A y B, el polígono funicular de la figura 1.10(b) debe pasar por un punto dado Q'', el polo O' del polígono de fuerzas, figura 1.10(a), se debe desplazar horizontalmente a O'' donde se verifica

$$\frac{\mathrm{O''X}}{\mathrm{O'X}} = \frac{\mathrm{qQ'}}{\mathrm{qQ''}} \quad . \tag{1.3}$$

El arco triarticulado

En la figura 1.11 se muestra la línea media de un arco; ni el arco ni las cargas tienen por qué ser simétricos. Las dos mitades del arco están conectadas entre sí y con los apoyos mediante articulaciones sin rozamiento. El arco triarticulado es, desde luego, una estructura perfectamente satisfactoria; es más, el arco es estáticamente determinado (isostático) y, por ejemplo, las reacciones en A y B debidas a las cargas W_1, etc. se pueden hallar descomponiendo las fuerzas y tomando momentos. (Hay que señalar que los valores de estas reacciones no se verán

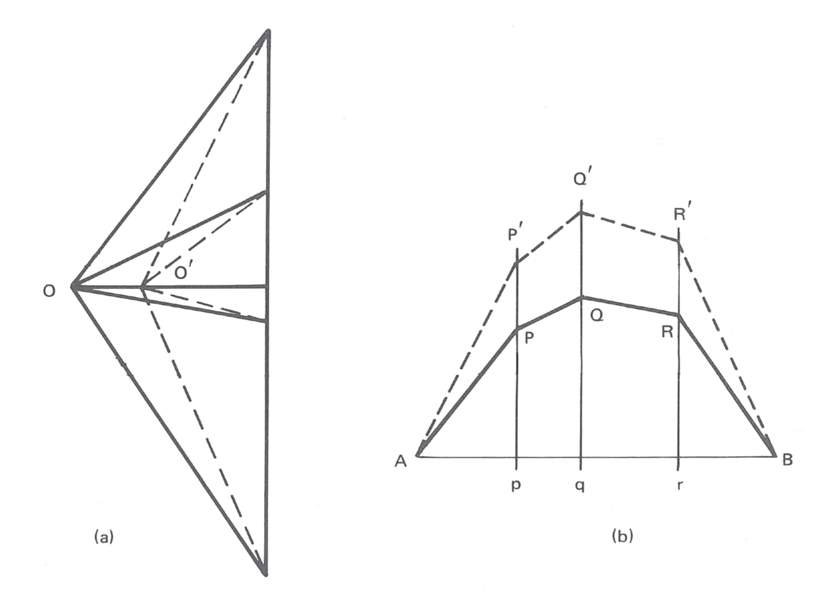


Figura 1.9

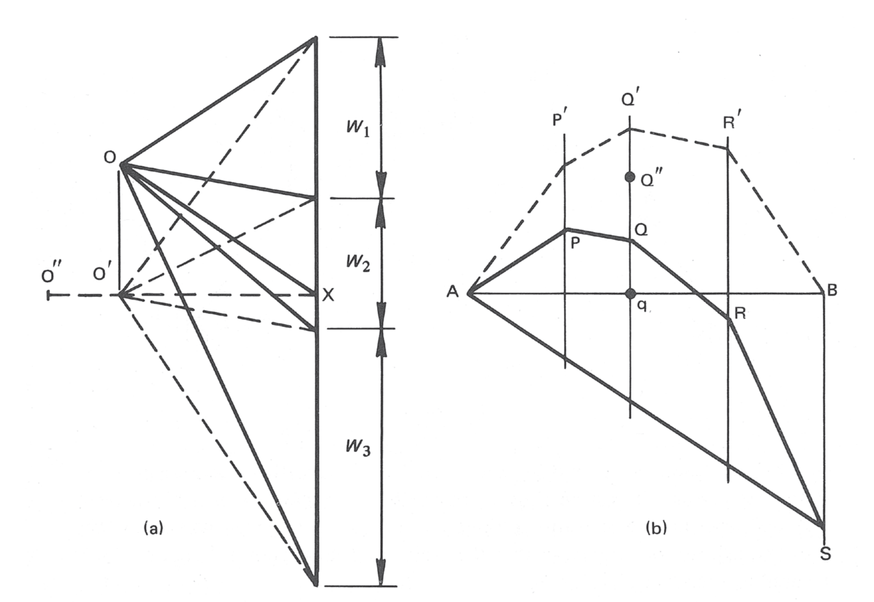


Figura 1.10

afectados por ningún pequeño movimiento de los apoyos. Siempre y cuando la geometría general del arco permanezca prácticamente inalterada, las ecuaciones de la estática tampoco cambiarán.)

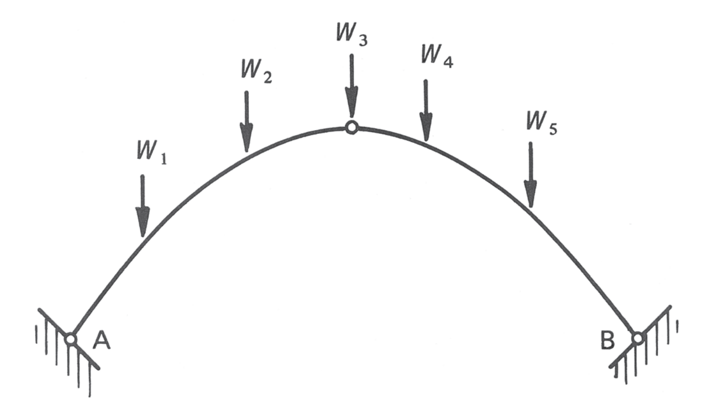


Figura 1.11

Como alternativa a escribir las ecuaciones de la estática, las reacciones se pueden hallar gráficamente. Se mostrará a continuación (o puede que ya sea obvio) que la línea de empujes del arco, es decir, el polígono funicular, debe pasar por las tres articulaciones, de manera que las técnicas mostradas en la figura 1.10 pueden utilizarse para construir los diagramas de la figura 1.12.

Se observará que, excepto en las tres articulaciones, la línea de empujes de la figura 1.12(b) no coincide con la línea media del arco, y esto tiene una interpretación estructural sencilla. En la figura 1.13(a) se ha «cortado» el arco a una distancia *x* de la articulación del apoyo A, y, para preservar el equilibrio, se han introducido en el corte las fuerzas horizontales y verticales, junto con el momento flector *M*. Tomando momentos, se encuentra que

$$M = -Hy + R_1 x \quad , \tag{1.4}$$

o, reorganizando,

$$M = H\left(\frac{R_1}{H}x - y\right) \quad . \tag{1.5}$$

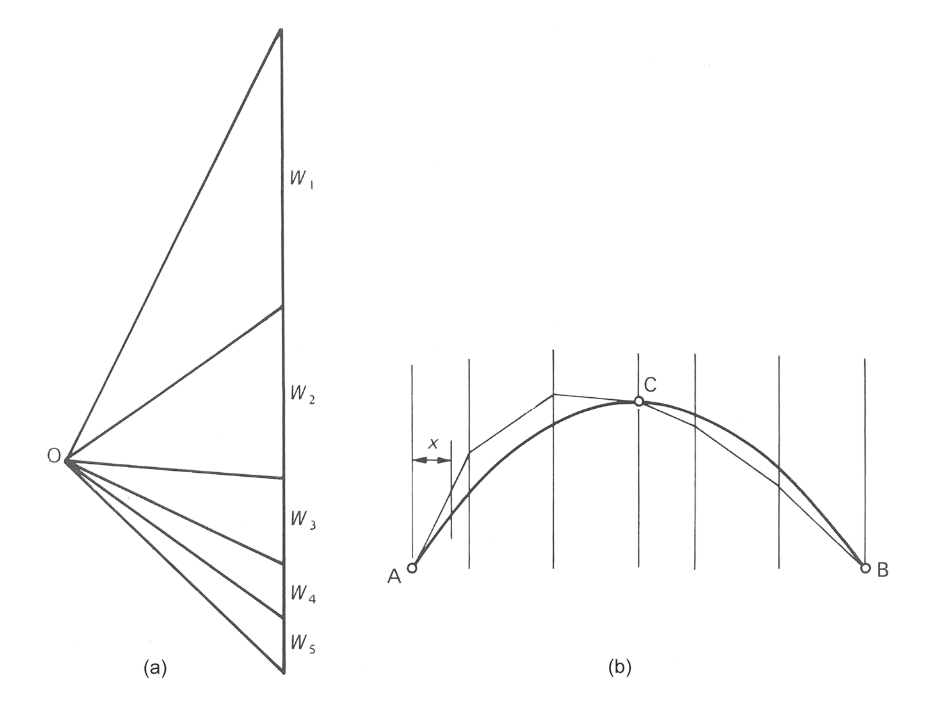


Figura 1.12

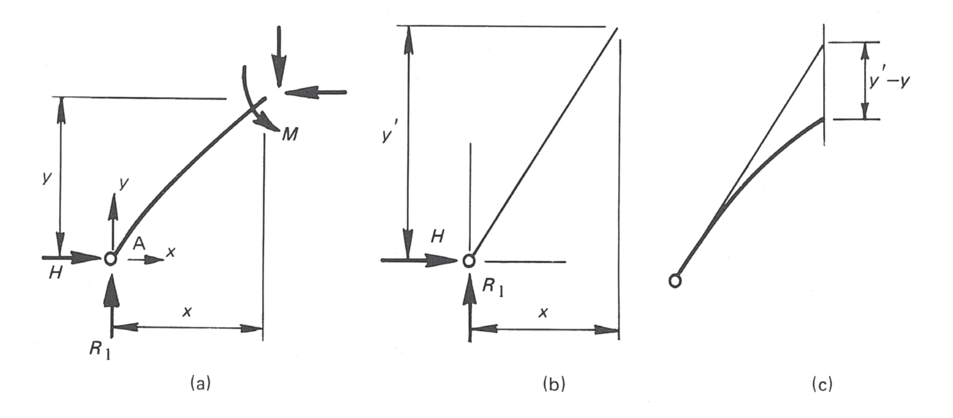


Figura 1.13

La figura 1.13(b) muestra la parte correspondiente de la línea de empujes, y se verá que R_1x/H es igual a la ordenada y'. La figura 1.13(c) muestra la línea media del arco y la línea de empujes, y la ecuación (1.5) implica que el momento flector en el arco es igual al producto de la componente *horizontal* (H) del empuje en el apoyo por la distancia *vertical* entre el arco y la línea de empujes.

Esta propiedad ha sido demostrada en las figuras 1.12 y 1.13 con respecto a una sección concreta del arco, pero la propiedad es general. Las distancias verticales entre la directriz del arco y la línea de empujes de la figura 1.12(b) dan, a cierta escala, los momentos flectores en el arco. Además, puesto que una articulación sin rozamiento no puede transmitir momento flector, la línea de empujes debe pasar por las articulaciones A, B y C.

Como se muestra en la figura 1.12(b), los momentos flectores en la mitad izquierda del arco son positivos y estiran la fibra inferior de la sección (nótese que las cargas W_1 y W_2 son mayores que el resto), mientras que los momentos flectores en la parte derecha del arco son negativos y estiran la fibra superior. (Los signos de los momentos flectores se pueden verificar en referencia a un ejemplo idealizado sencillo. En la figura 1.14 una carga puntual actúa sobre el arco. La correspondiente línea de empujes, equivalente a la forma del hilo colgante, debe consistir en las dos líneas rectas que se muestran.)

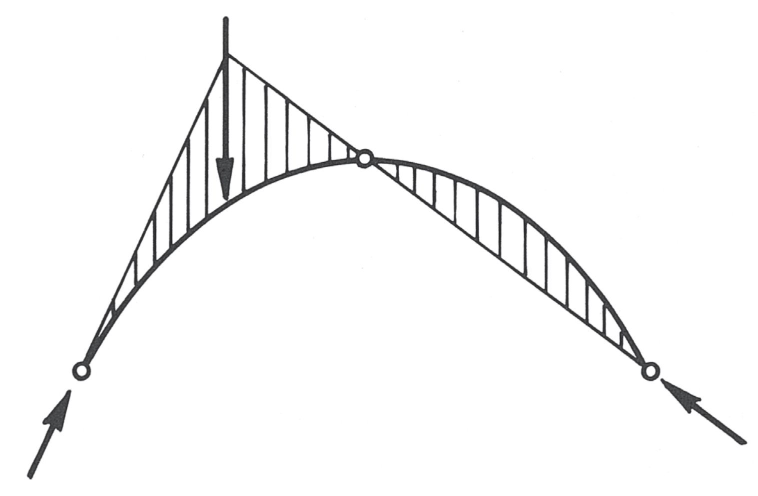


Figura 1.14

La regla del tercio central

Las cargas y construcciones de las figuras 1.11 y 1.12 se suponían aplicadas a un arco triarticulado. La figura 1.15 muestra las mismas cargas aplicadas a un arco de dovelas con la misma línea media que en el caso anterior, y la figura 1.16 muestra el polígono funicular de la figura 1.12(b) dibujado en el arco de la figura 1.15. Evidentemente, el polígono funicular representa una línea de empujes que equilibra las cargas dadas; en general esta línea de empujes no será simétrica ni estará colocada simétricamente dentro del arco.

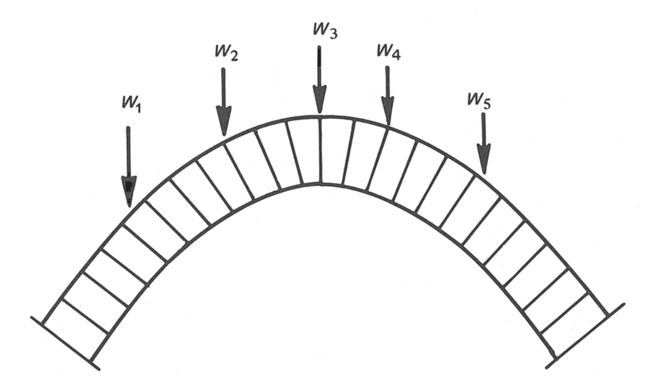


Figura 1.15

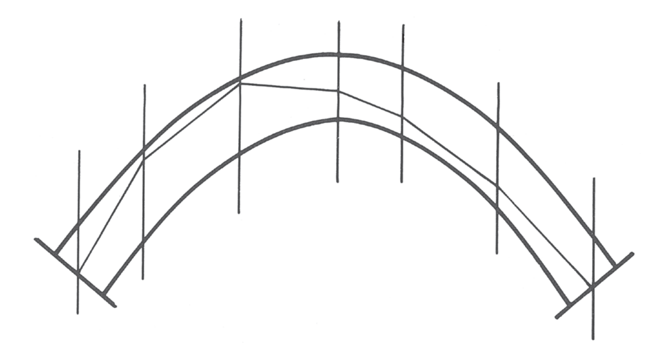


Figura 1.16

La afirmación de que la línea de empujes equilibra las cargas se puede ampliar. Si el arco se «corta» por cualquier punto, por ejemplo, por una junta entre dos dovelas, el equilibrio se puede mantener introduciendo un empuje en la sección cortada que actúa a lo largo de la línea del polígono funicular. En la figura 1.17 se han realizado dos cortes, y la porción de arco está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas mostradas. Puede verse que el empuje en el arco no es necesariamente perpendicular a las caras de las dovelas sobre las que actúa; en cambio, en cada sección hay una fuerza normal acompañada de una fuerza tangencial, y esta última tenderá a provocar que una dovela deslice sobre la otra. Este efecto de deslizamiento es evidentemente pequeño, y se asumirá que el deslizamiento entre una piedra y la contigua no se produce; este asunto se discute con más detalle en el capítulo 2. Es la acción del empuje normal lo que interesa en este momento.

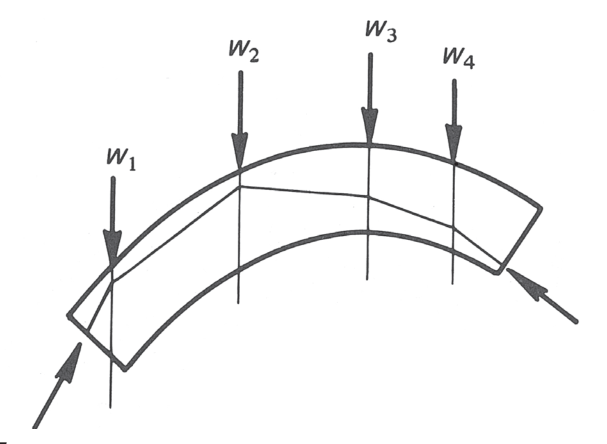


Figura 1.17

Para ilustrar el problema y ayudar a comprender el funcionamiento estructural, la figura 1.18(a) muestra un apilamiento de losas de piedra idénticas (digamos losas de pavimento) colocadas una sobre otra sin mortero entre ellas. Se supone que las losas son elásticas, y descansan sobre una cimentación rígida; están coronadas por una losa rígida, sobre la que se aplica una fuerza vertical. En la figura 1.18(b) una carga puntual actúa en el centro de la pila de losas; la teoría elástica elemental muestra que todas las losas estarán sometidas a la misma compresión, y una ten-

sión uniformemente distribuida se transmitirá a la cimentación. En la figura 1.18(c) la carga se ha desplazado ligeramente del centro, y se muestra de nuevo la distribución de tensiones que predice la teoría elástica simple. Esta distribución es lineal, y cuando la carga está en el límite del «tercio central» (figura 1.18(d)) la tensión en uno de los bordes se hace cero.

Si la carga se desplaza aún más lejos del centro, figura 1.18(e), la pila de losas es todavía una «estructura», en el sentido de que puede continuar soportando la carga exterior aplicada. Sin embargo, si como hemos supuesto, las losas no están unidas con mortero, no podrán transmitir esfuerzos de tracción, y es preciso modificar la teoría elástica simple de la flexión compuesta con fuerzas de compresión. La

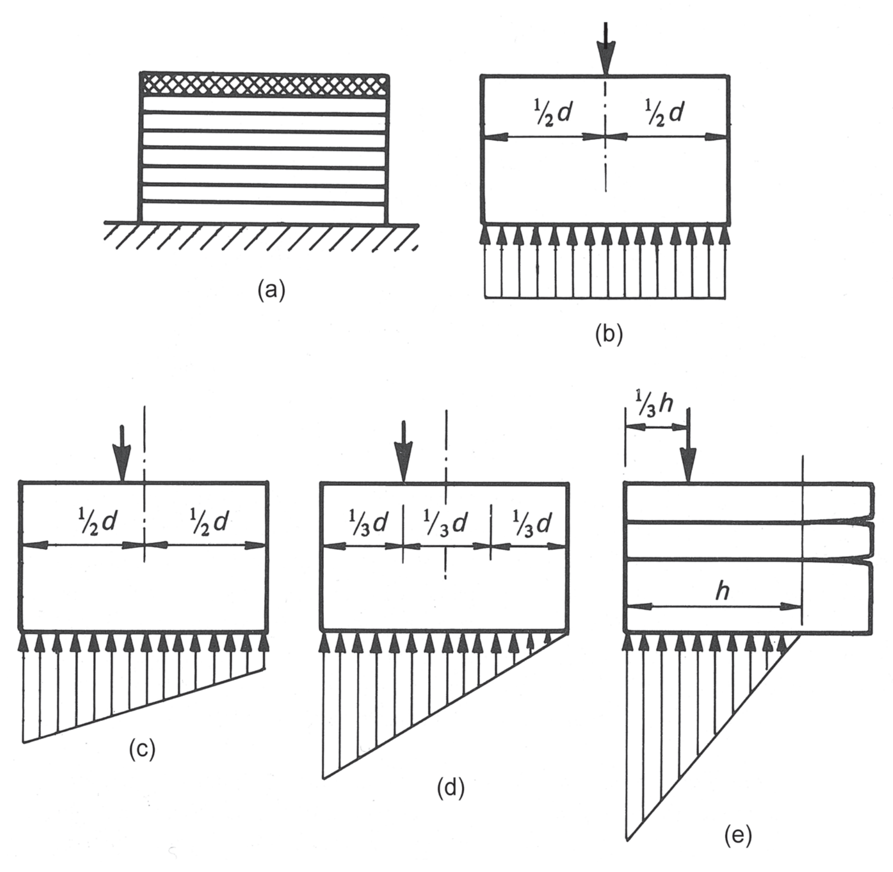


Figura 1.18

distribución de las tensiones de compresión de la figura 1.18(e) es todavía lineal, de acuerdo con la teoría elástica, pero en las partes donde la teoría de flexión predice tracciones, las losas tenderán a separarse.

Por lo tanto, si la carga aplicada se mantiene dentro de un cierto «núcleo» de la sección, las tensiones en toda la sección serán de compresión. Para una sección rectangular el núcleo tiene un ancho que es el tercio del espesor total de la sección; si la sección tiene otra forma, el núcleo tendrá una proporción distinta del espesor.

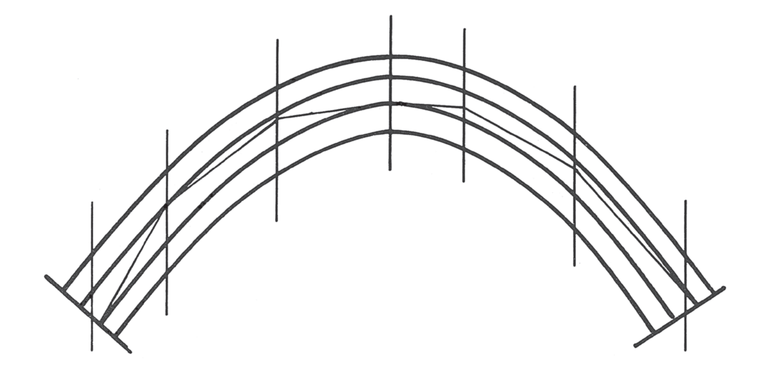


Figura 1.19

Para el arco de fábrica es el tercio central el que es relevante, y algunos ingenieros del siglo XIX (y del XX) han considerado la «regla del tercio central» como un requisito primordial en el proyecto. La figura 1.16 mostraría con total seguridad un proyecto completamente satisfactorio, si la línea de empujes se encontrara, no dentro del arco real, sino dentro del arco imaginario más delgado mostrado en la figura 1.19, con un espesor de un tercio de las dimensiones reales. (Hay que señalar que si el polo del polígono de fuerzas se desplazara ligeramente, en horizontal y en vertical tal y como se muestra en la figura 1.10, el polígono de fuerzas de la figura 1.16 podría desplazarse a la posición mostrada en la figura 1.19. Estas dos líneas de empujes dan dos maneras diferentes de equilibrar las mismas cargas *W* del arco de la figura 1.15.)

Se ha llegado al criterio del tercio central sobre la base de que las predicciones de la teoría elástica se observarán en la realidad; las imperfecciones en el mundo real, o quizá un simple vistazo a la fotografía de la figura 1.3, hacen parecer improbable que

se produzca en realidad un comportamiento elástico lineal. Por otra parte, se ha supuesto que hay que evitar la tracción, pero no se ha justificado la idea de que el agrietamiento del mortero entre dovelas sea en algún sentido peligroso. De hecho, la regla del tercio central se ha relajado en ocasiones, al menos en teoría, a la regla de la mitad central; el arco interior de la figura 1.19 puede aumentarse ligeramente.

La limitación implicada en la figura 1.19 parece, en resumen, derivada teóricamente de argumentos basados en suposiciones dudosas. Sin embargo, como se mostrará en el capítulo siguiente, es el tipo correcto de limitación que se debe utilizar en el proyecto de un puente. En concreto, parece que el arco real de la figura 1.19 tiene un cierto coeficiente de seguridad con respecto al arco más fino. La figura 1.19 muestra un arco dentro de otro arco; si el arco más fino se demuestra, de una manera o de otra, satisfactorio, entonces intuitivamente se espera que el arco real también sea satisfactorio. Que esta intuición es correcta se demostrará en el capítulo siguiente.

El problema será entonces ver si es posible o no construir líneas de empujes, es decir, polígonos funiculares, dentro de arcos de unas dimensiones dadas. Estas verificaciones se pueden hacer de una forma puramente analítica, y más adelante en el libro se muestra como hacer los cálculos. Hay, sin embargo, una elegante construcción que demuestra que el asunto es puramente geométrico.

El método de Fuller

El arco de la figura 1.15 se ha representado en la figura 1.20(a) por su línea media, y se muestra también la línea de empujes de la figura 1.16 (cf. figura 1.12(b)). Pero no es necesario que la línea de empujes de la figura 1.20(a) sea una línea especial; como se verá, el polo O del polígono de fuerzas (figura 1.12(a)) puede colocarse en cualquier posición conveniente para comenzar con la construcción de Fuller.

La figura 1.20(b) ofrece la misma información que la figura 1.20(a), pero la escala horizontal se ha distorsionado. Cada segmento del arco (entre los puntos donde están aplicadas las cargas) se ha estirado o contraído de manera que la línea de empujes se ha convertido simplemente en dos líneas rectas, mientras que la línea media del arco (quizá originalmente parabólica) ha tomado la forma distorsionada que se muestra. Sin embargo, las distancias verticales entre la línea media del arco y la línea de empujes son las mismas en las secciones correspondientes de las figuras 1.20(a) y 1.20(b).

Lo importante de la construcción de Fuller es la transformación del polígono funicular en dos líneas rectas. Para un conjunto de cargas dado, una vez se ha dibujado la forma distorsionada del arco, figura 1.20(b), si se desplaza el polo O del polígono de fuerzas el polígono funicular seguirá estando representado por dos líneas rectas; esto se deduce de la exposición anterior en este capítulo de las propiedades de los polígonos de fuerzas y funiculares.

Así, en la figura 1.20(c) se muestra el perfil distorsionado de un arco de espesor finito. La cuestión de si es o no posible equilibrar las cargas dadas con una línea de empujes que se encuentre dentro del arco puede resolverse ahora inmediatamente. Todo lo que se necesita es demostrar que se pueden dibujar dos líneas rectas (mostradas a trazos en la figura 1.20(c)) dentro del arco distorsionado. Para el ejemplo que se muestra las rectas caben justo dentro del espesor; si el arco tuviera un espesor menor ya no cabrían. Hay que señalar que esta construcción no requiere localizar el correspondiente polo del polígono de fuerzas.

La figura 1.20 se ha redibujado en cierta medida en la figura 1.21. Por comodidad, las reacciones verticales en los apoyos se han hallado mediante las ecuaciones de la estática, y así se ha dibujado el polígono funicular $Aa_1a_2...a_5B$ sobre una línea base horizontal AB; los puntos A y B están en el intradós del arco. El valor de la componente horizontal *H* del empuje se ha elegido arbitrariamente. Sobre la línea base se toman dos puntos cualesquiera A' y B', y el polígono funicular distorsionado consiste en dos líneas rectas $A'a_2$ y $B'a_2$, donde a_2 es (igual que antes) el punto más alto del polígono funicular. Así el punto a_5 del polígono funicular original se desplaza a a'_5, y el correspondiente punto b_5 del intradós se desplaza la misma distancia horizontal hasta b'_5.

En la figura 1.21 se muestran solamente las líneas de construcción del intradós, pero también se muestra el trasdós distorsionado. De nuevo, la figura 1.21 contiene la misma información que la figura 1.20(c). Para el arco real, se puede dibujar un polígono funicular para las cargas dadas que quede completamente dentro de la fábrica si en la figura 1.21 se pueden dibujar dos líneas rectas dentro del espesor del arco distorsionado.

La idea de que un arco debe tener un espesor mínimo para contener una línea de empujes para unas cargas dadas (y la posibilidad de determinar ese espesor mínimo) ofrece la clave para establecer un coeficiente de seguridad en estructuras reales. Esto se discutirá en el siguiente capítulo.

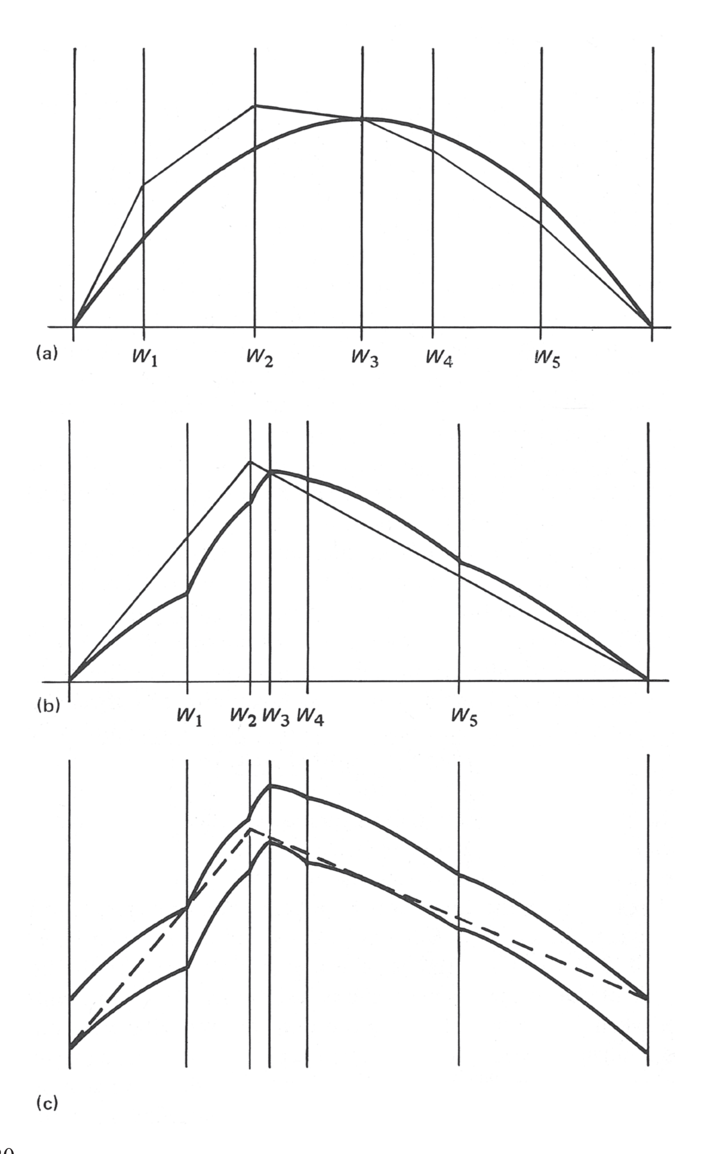


Figura 1.20

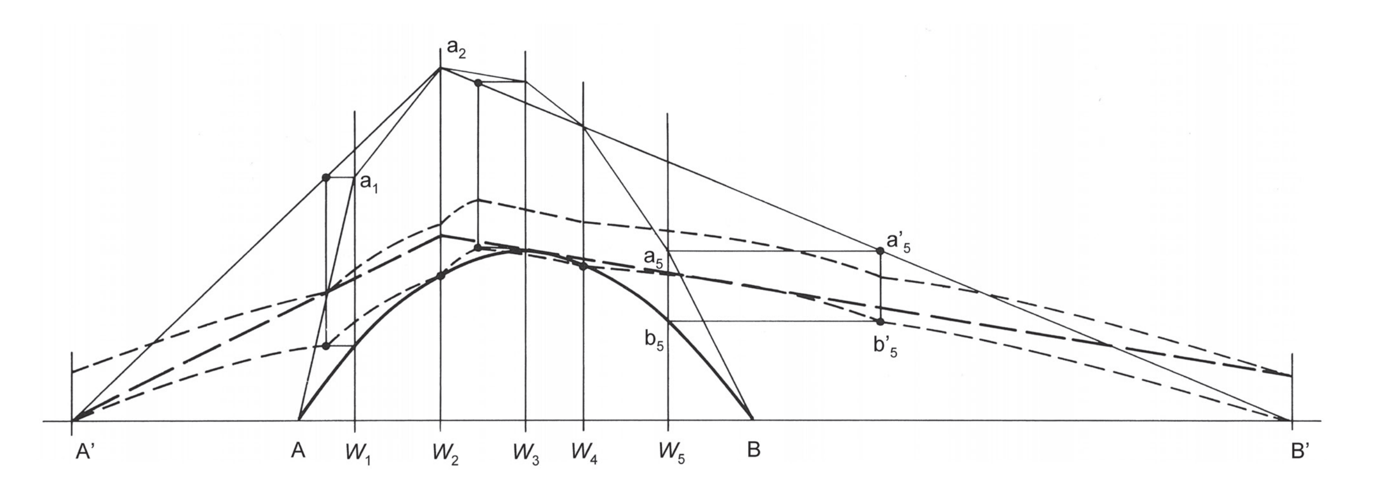


Figura 1.21

2
Los teoremas plásticos

La teoría de estructuras se basa en escribir tres tipos diferentes de ecuaciones. En primer lugar, se deben hacer afirmaciones para expresar el hecho de que una estructura dada está en *equilibrio* bajo unas determinadas cargas. En segundo lugar, es posible hacer afirmaciones sobre la *deformación* de la estructura. Por último, puede ser necesario introducir en el análisis las *propiedades del material* de la estructura. Así, en el análisis elástico convencional, las fuerzas internas se pueden escribir en función de las cargas exteriores aplicadas, las deformaciones internas pueden calcularse como linealmente dependientes de las fuerzas internas y, finalmente, los desplazamientos de la estructura deben ser compatibles con cualquier limitación impuesta interna o externamente. Una estructura es estáticamente determinada (isostática) si las fuerzas internas se pueden calcular de manera inmediata en función de las cargas aplicadas a partir de simples consideraciones de equilibrio; es estáticamente indeterminada (hiperestática) si no pueden hallarse de esta manera. Este libro no se ocupa de las soluciones elásticas de estructuras estáticamente indeterminadas, pero cabe señalar que esas soluciones pueden encontrarse de diversas maneras, y los tres tipos de ecuaciones pueden plantearse en función de diferentes cantidades desconocidas.

Tal como se señaló, el arco de la figura 1.11 (suponiendo que tiene tres articulaciones sin rozamiento) es una estructura estáticamente determinada. Para unas cargas dadas W_1, W_2..., se pueden hallar las reacciones en A y B, de modo que las cargas exteriores están completamente definidas. El polígono funicular de la fi-

gura 1.12(b) es único, ya que necesariamente debe pasar por los tres puntos A, B y C (es decir, la posición del polo O del polígono de fuerzas de la figura 1.12 se puede determinar sin ambigüedad); así pues, las fuerzas internas, por ejemplo los momentos flectores en cada sección del arco, pueden obtenerse de manera inmediata. Todos estos cálculos pueden hacerse sin ninguna referencia a las nociones de deformación y sin ninguna información sobre las propiedades del material con el que está construido el arco. Es decir, no es necesario hacer afirmaciones sobre las deformaciones internas del arco, y no se han impuesto restricciones a los desplazamientos.

No obstante, estas observaciones esconden la suposición habitual en la teoría de estructuras de que los desplazamientos son pequeños. No es necesario que la línea media del arco de la figura 1.12(b) mantenga *exactamente* su forma original una vez cargado, y los apoyos A y B pueden quizá ceder ligeramente debido al empuje. Estas deformaciones, sin embargo, no deben ser lo suficientemente grandes como para ser apreciadas; dicho de una forma imprecisa, la forma distorsionada del arco cargado debe parecerse lo suficiente a la forma original como para que no sea necesario tener en cuenta el cambio en la geometría al escribir las ecuaciones de equilibrio.

Estas restricciones en las deformaciones pueden hacerse numéricamente más precisas. Podríamos aceptar para los objetivos del análisis, que un desplazamiento en algún punto de la línea media del arco de una milésima o una centésima de la luz, no alteraría las ecuaciones de equilibrio. Sin embargo, el hecho de que las ecuaciones de equilibrio no se vean afectadas significativamente, no nos dice, en este punto, qué efecto pueden tener estas pequeñas deformaciones en el comportamiento general del arco. ¿Dañaría el arco una pequeña apertura de los apoyos, aunque no sea visible? ¿Qué efecto tendría que una pila del río descendiera diferencialmente respecto de las vecinas? Veremos cómo la teoría plástica ayuda a dar respuestas concluyentes a estas cuestiones.

El problema estructural

Cualquier teoría de estructuras, ya sea elástica o plástica, se ocupa de los casos estáticamente indeterminados. No hay en principio ninguna dificultad en usar las fuerzas internas estáticamente determinadas del arco de la figura 1.12(b)

para calcular las deformaciones (suponiendo que se conocen las propiedades del material), y el proyectista puede determinar fácilmente la magnitud de las tensiones o de cualquier otra cantidad significativa. Por el contrario, el arco de la figura 1.15, teniendo la misma línea media y soportando las mismas cargas que el arco triarticulado, está indeterminado estáticamente. La línea de empujes puede ser parecida a la dibujada en la figura 1.16, pero ya no hay tres puntos fijos que puedan usarse para situarla. El principal problema estructural, planteado aquí en términos de un arco de dovelas, consiste en determinar la posición de la línea de empujes, de manera que se puedan hallar las fuerzas internas.

Por supuesto, para resolver el problema se deben usar las otras ecuaciones estructurales. Es decir, la afirmación de *equilibrio* para el arco de dovelas está representada por el polígono funicular y el polígono de fuerzas, pero las consideraciones de la estática no dan información alguna para determinar la posición del polo O del polígono de fuerzas (como, por ejemplo, en la figura 1.12(a)). Lo único que se puede determinar a partir de la estática es la forma general de la línea de empujes de la figura 1.16, pero no su posición precisa.

En el caso de un análisis plástico del arco de dovelas, al contrario que para un análisis elástico, poco hay que decir sobre la *deformación* de la estructura. Como se ha señalado anteriormente, se asume que los desplazamientos son pequeños, pero no es necesario un análisis general de las deformaciones en el arco. Como se verá, sí se debe estudiar la geometría del modo en que un arco podría colapsar, y de hecho este estudio ayuda a determinar posibles posiciones del polígono funicular.

Las propiedades del material fábrica en un arco de dovelas deben ser definidas cuidadosamente para obtener la tercera de las afirmaciones necesarias para el establecimiento de una teoría estructural. Hay tres supuestos clave:

El deslizamiento es imposible

Se supone que el rozamiento entre dovelas es suficientemente alto, o que las piedras están conectadas eficazmente, de manera que no pueden deslizar una sobre otra. Resulta que esta es una suposición perfectamente razonable, aunque es ciertamente posible encontrar en la realidad evidencias ocasionales de deslizamiento en estructuras de fábrica.

La fábrica no tiene resistencia a tracción

Aunque la piedra tiene evidentemente una resistencia a tracción definida, las juntas entre dovelas pueden no tener mortero, o tener un mortero poco resistente. Por lo tanto, esta suposición implica que no se pueden transmitir fuerzas de tracción dentro de la fábrica. De acuerdo con el sentido común, y con los principios de los teoremas plásticos (que se tratarán más adelante), esta suposición es «segura»; puede ser demasiado segura, es decir, poco realista si, por ejemplo, la conexión entre las piedras que impide el deslizamiento permite también que se transmitan localmente esfuerzos de tracción.

La fábrica tiene resistencia infinita a compresión

Esta suposición implica que las tensiones son tan bajas en las construcciones de fábrica que no hay peligro de rotura del material. Esta suposición es obviamente «insegura», pero no es en absoluto poco realista. Resulta que, para una gran gama de puentes del tipo considerado aquí, las tensiones medias son en realidad bajas; no obstante, para cualquier estructura dada, deben hacerse los cálculos de comprobación. Las implicaciones generales de esta suposición se señalan más adelante.

Así, la fábrica aparece como un conjunto de piedras cortadas para colocarlas juntas en una forma estructural coherente, una forma que se mantiene mediante fuerzas de compresión transmitidas dentro de la masa del material. Estas fuerzas surgen de la carga permanente («muerta») de la estructura, del peso propio del material y (por ejemplo) del peso de cualquier relleno incorporado en los tímpanos de los arcos del puente. La sobrecarga se transmitirá también por fuerzas de compresión, y, en todos los casos, estas fuerzas se suponen lo suficientemente altas para que el rozamiento impida el deslizamiento en las juntas.

La pregunta que surge entonces es cómo puede fallar este conjunto de fábrica en cualquier sentido estructural significativo. Si la fábrica es infinitamente resistente, parece que calcular los niveles de tensiones no llevará al criterio de fallo. Sin embargo, la idea de que la tracción no es admisible puede ser de gran importancia. En la figura 2.1(a) la junta Mm entre dos dovelas dadas se ha identificado de alguna manera como la junta «crítica» (se verá más adelante cómo se identifica esta junta). Esta junta podría ser considerada crítica si el empuje transmitido entre las dovelas se aproxima a la superficie, por ejemplo al trasdós m, permi-

tiendo que se forme la «articulación» de la figura 2.1(b). (Igualmente, se podría formar una articulación alrededor del punto M en el intradós.) La articulación de la figura 2.1(b) se corresponde con la situación límite de la secuencia mostrada en la figura 1.18, cuando la carga excéntrica ha alcanzado el borde de la pila de losas de pavimento.

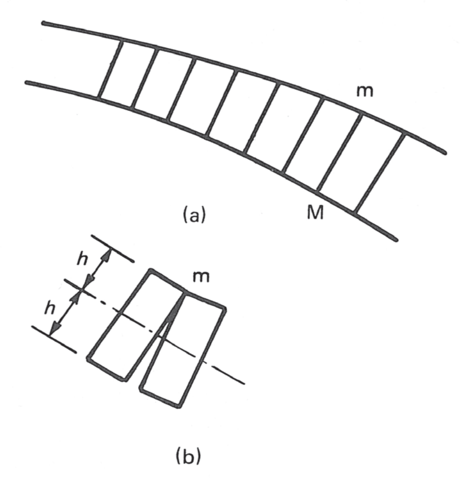


Figura 2.1

Ahora, las resultantes de tensiones, es decir, la acción estructural en cada junta entre dovelas, como Mm, se especificará en función de la magnitud, dirección y punto de aplicación de la fuerza transmitida a través de la junta. Si la componente tangencial de la fuerza no es importante (ya que se ha supuesto que no puede haber deslizamiento), lo que se necesita es conocer el valor de la fuerza normal N a través de la junta, junto con el valor de su excentricidad (digamos e) respecto a la línea media. Es conveniente trabajar, temporalmente, con un «momento flector» $M = Ne$ como segunda variable, de manera que las resultantes de tensiones N, M definen el estado de la estructura en cualquier sección.

La articulación de la figura 2.1(b) se formará cuando la excentricidad e del empuje normal alcance el valor h, es decir, cuando $M = hN$. Las líneas $M = \pm hN$

se muestran como OA y OB en la figura 2.2, y representan, para cualquier junta entre dovelas, la condición de que existe una articulación. Un punto general (*N*, *M*) en la figura 2.2 que se encuentre dentro del triángulo AOB representa un empuje entre dovelas con una excentricidad menor que *h*, es decir, la línea de empujes se encuentra dentro de la fábrica en ese punto, y no se forma ninguna articulación. Si el punto general se encuentra en OA o en OB, entonces la articulación

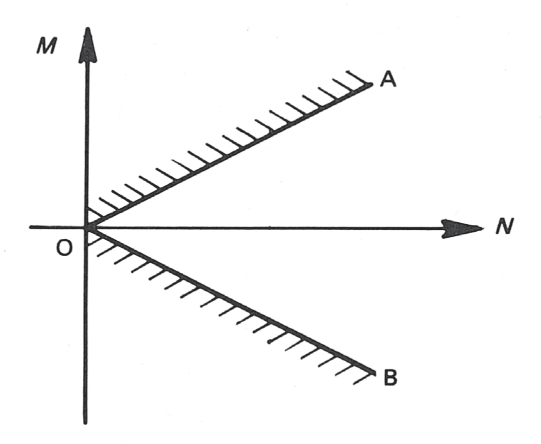


Figura 2.2

se está formando en el trasdós o en el intradós del arco, y la línea de empujes está en la superficie de la fábrica. Un punto no puede estar fuera del triángulo AOB ya que el equilibrio en la junta sería imposible para un material incapaz de resistir tracciones.

La construcción de la figura 2.2 implica suponer que la fábrica tiene infinita resistencia a compresión. Cuando la línea de empujes se aproxima al borde de la dovela (cf. figura 1.18(e)), la tensión en el área decreciente de contacto aumentará, y una piedra real con una resistencia finita a la rotura no permitirá la línea de contacto en la articulación que se muestra en la figura 2.1(b). Así, las líneas OA y OB de la figura 2.2 no pueden alcanzarse; se han sustituido por las líneas ligeramente curvas de la figura 2.3. El límite está formado por los arcos parabólicos OCD, OED de la figura 2.4, y el punto genérico (*N*, *M*) que representa el empuje en cualquier punto del arco está obligado en realidad a situarse dentro de este límite.

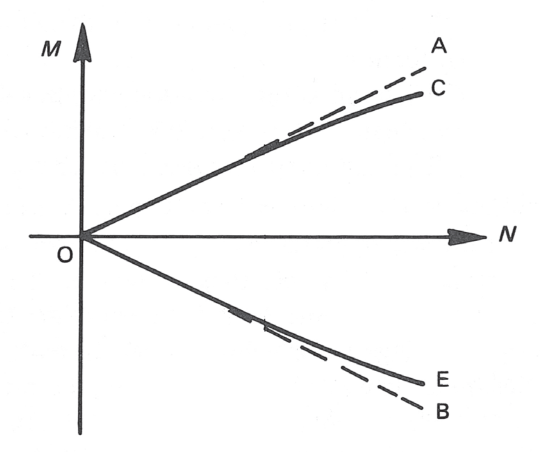


Figura 2.3

La suposición de tensiones medias de compresión bajas, limita en realidad la posición del punto (*N*, *M*) al área OCE de la figura 2.4; es esta área la que se ha aumentado en la figura 2.3, y en ella los límites curvos reales se separan sólo ligeramente de las líneas rectas aproximadas.

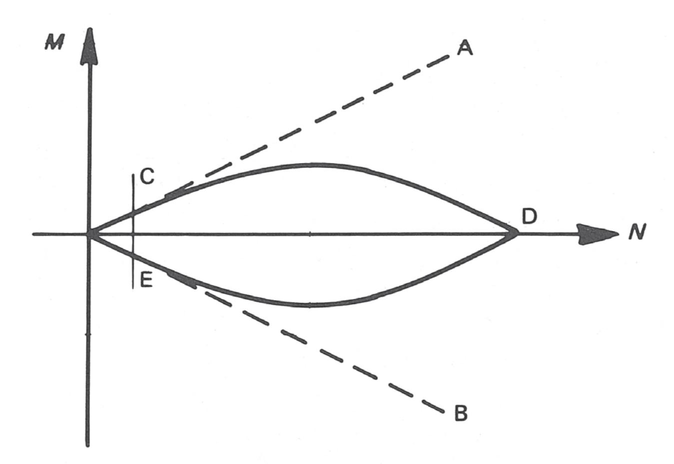


Figura 2.4

Los límites de las figuras 2.2, 2.3 y 2.4 son ejemplos de superficies de cedencia de la teoría de la plasticidad, y toda la exposición puede llevarse a cabo dentro del marco de esa teoría. La figura 2.2 se usará como base para el desarrollo de los principios, aunque los resultados serán evidentemente algo inseguros. En realidad, pueden hacerse totalmente seguros con el recurso mostrado en la figura 2.5. Si pensamos que las tensiones normales medias no exceden, digamos, del 10% de la resistencia a rotura del material, entonces las líneas rectas OA, OB de la figura 2.2, es decir, $M = \pm hN$, se pueden remplazar por las líneas rectas OC, OE de la figura 2.5, dadas por $M = \pm 0{,}9\ hN$ (cf. Figura 2.3). De este modo el espesor (local) del

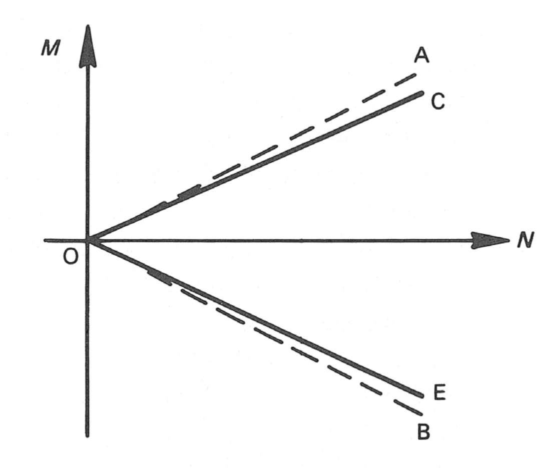


Figura 2.5

arco real $2h$ se sustituye, para el análisis, por un arco hipotético de espesor $2(0{,}9h)$; este tipo de «reducción» es, como veremos, relevante para la estimación de la seguridad de los arcos de fábrica. La suposición de que las tensiones son menos del 10% (o cualquier otro porcentaje) de la resistencia a rotura del material puede comprobarse al final de los cálculos.

Por lo tanto, se supondrá que el punto genérico (N, M) debe situarse dentro del triángulo abierto AOB en la figura 2.2. Esto implica, como se ha visto, que la línea de empujes del arco debe situarse dentro de la fábrica. A su vez, esto significa que el polo O del polígono de fuerzas debe estar localizado en tal posición que el co-

rrespondiente polígono funicular (esto es, la línea de empujes) quede dentro de la fábrica. No se ha dado todavía, aparte de este requisito, ninguna otra orientación para situar la posición «real» del polo O y la correspondiente posición «real» de la línea de empujes. (Más adelante se aclarará la razón de la desconfianza en el uso de la palabra «real».)

Sin embargo, se puede hacer una afirmación muy potente traduciendo el teorema de la «seguridad» (o del límite inferior) en términos aplicables a la fábrica: si se puede encontrar una línea de empujes, para el arco completo, en equilibrio con las cargas exteriores (incluido el peso propio), y que queda en todo momento dentro del arco de fábrica, entonces el arco es seguro. La importancia de este teorema radica en el hecho de que la línea de empujes hallada de esta manera no tiene por qué ser la verdadera línea de empujes. Para demostrar que el arco se sostendrá como una estructura sólo es necesario demostrar que hay al menos un sistema de fuerzas internas satisfactorio; visto de un modo antropomórfico, el arco es al menos tan inteligente como el calculista, y descubrirá por sí mismo una posición igualmente satisfactoria del polo del polígono de fuerzas.

Las conclusiones del teorema de la seguridad son inequívocas: si se encuentra una línea de empujes satisfactoria, el proyectista sabe que el arco no puede colapsar, y no será necesario analizar los posibles modos de colapso. Esta tranquilidad «anti-insomnio» del teorema de la seguridad siempre ha sido apreciada por el proyectista experimentado, incluso cuando no ha sido capaz de formular con precisión ese teorema en base a la teoría plástica. El trabajo del proyectista es obtener un conjunto de fuerzas en equilibrio «razonable» en el que basar sus cálculos, y está acostumbrado a usar cualquier ayuda a su alcance para obtener los valores de estas fuerzas.

Así, para evaluar el estado real del arco de fábrica, el enfoque elástico tradicional realizará ciertas suposiciones sobre los apoyos, por ejemplo que son rígidos, o que cederán de acuerdo a unas ciertas reglas especificadas al someterse a la carga. Una vez definidas algunas suposiciones de este tipo, se puede realizar un análisis elástico de la estructura (o quizá un análisis no elástico si es posible contemplar la complejidad de las propiedades reales del material). El proyectista habrá obtenido así un conjunto de fuerzas compatible con sus suposiciones, y, desde luego, en equilibrio con las cargas aplicadas. Describir este conjunto de fuerzas como el estado real de la estructura es, sin embargo, concluir demasiado de este análisis.

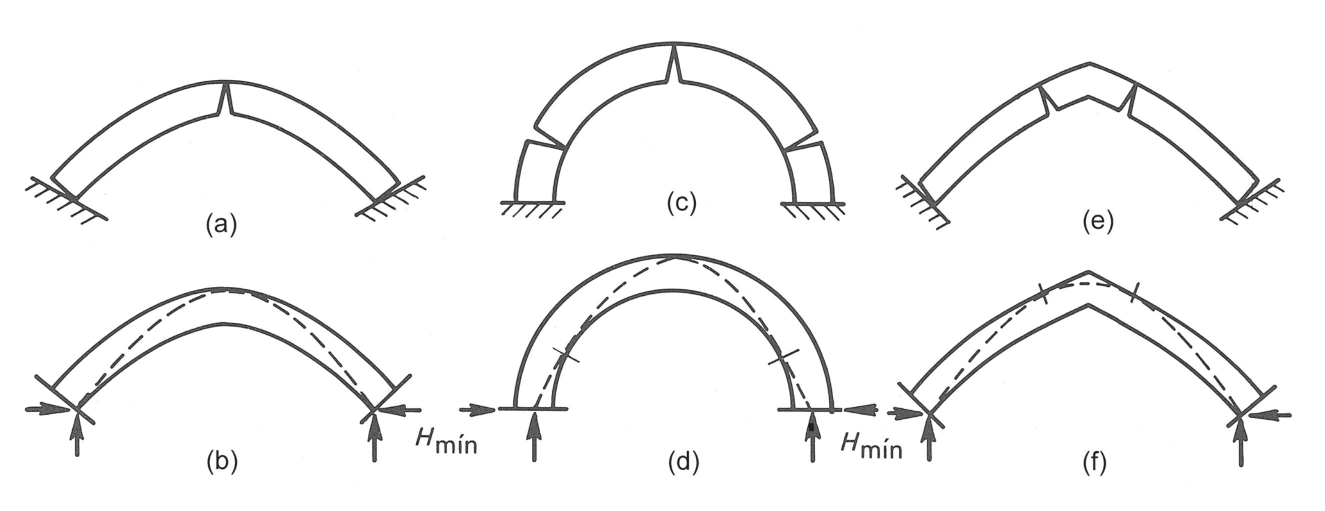


Figura 2.6

Si no es por otra causa, el paso del tiempo destruirá inevitablemente las suposiciones del proyectista; un apoyo cederá ligeramente, o una pila asentará, y muy pequeños movimientos de este tipo pueden alterar en gran medida el estado de equilibrio de la estructura. Sin embargo, no parece razonable suponer que un asiento de unos pocos milímetros en un vano de varios metros, incluso si tiene grandes efectos visibles en la posición de la línea de empujes del arco, pueda tener en realidad efectos medibles en la resistencia final del arco.

El teorema de la seguridad justifica, precisamente, este sentido común. Pequeñas deformaciones del arco, inapreciables a simple vista, pueden provocar que la línea de empujes se mueva bruscamente dentro de la fábrica (como se mostrará más adelante, figuras 2.6(f) y 2.8(b)). El teorema de la seguridad afirma que una vez que se ha demostrado que hay una posición de la línea de empujes dentro de la fábrica, entonces (continuando con el punto de vista antropomórfico) no importa cómo se mueva la línea de empujes en respuesta a los cambios del entorno, no puede nunca salirse de la fábrica.

Es un problema de la geometría general. Un defecto de unos pocos milímetros en unos pocos metros es un defecto del orden de una milésima, es decir, del orden del grosor de una línea a lápiz en un dibujo del arco. En la mesa de dibujo el arco perfecto y el arco deformado parecerán el mismo. Un polígono funicular que sea satisfactorio para el arco perfecto será igualmente satisfactorio para el arco deformado.

El coeficiente geométrico de seguridad

Como ya se ha señalado, las palabras «satisfactorio» y «seguro» pueden ser claras, pero no tienen un significado numérico. La afirmación de que un arco es «seguro» si se puede demostrar que contiene un polígono funicular apropiado no indica el alcance de esa seguridad. Se puede avanzar algo hacia la obtención de una evaluación numérica considerando los modos en que un arco puede fallar. Como primer paso, se arrojará algo de luz mediante el estudio del modo en que un arco puede adaptarse a pequeños movimientos de sus apoyos.

Imaginemos un arco de dovelas, construido con un material rígido, que cumple las suposiciones sobre el comportamiento del material descritas antes, y perfectamente fijo entre sus apoyos. Si los apoyos se abren, el arco se puede acomodar al

aumento de la luz formando tres articulaciones como las mostradas en la figura 2.6(a), una en la clave en el trasdós, y una en cada apoyo en el intradós. Si el arco es semicircular, entonces las articulaciones del intradós se alejarán de los apoyos (figuras 2.6(c) y 2.7) pero, en cualquier caso, los arcos de las figuras 2.6(a) y (c) se han convertido, de hecho, en arcos triarticulados. Los polígonos funiculares de estos arcos pueden dibujarse inmediatamente, ya que la línea de empujes debe pasar por los puntos de articulación, y las líneas esquemáticas (para una supuesta carga simétrica) se muestran en las figuras 2.6(b) y (d).



Figura 2.7 Puente del Clare College, Cambridge. Otra vista de la zona mostrada en la figura 1.5. El aumento de la luz del arco central ha provocado la formación de articulaciones entre las dovelas

El arco apuntado de la figura 2.6(e) formará, en teoría, cuatro articulaciones si aumenta la luz. Ahora bien, el arco triarticulado es una forma estructural bien conocida; a la luz de las observaciones que se realizarán a continuación sobre las condiciones para la formación de mecanismos de colapso, se debe tener cuidado para evitar la alarma a la vista de las cuatro articulaciones de la figura 2.6(e). La figura 2.6(f) muestra la correspondiente línea de empujes, y es evidente que, si hay una ligera asimetría, ya sea geométrica, o en la carga, una de las articulaciones del trasdós cercanas a la clave no se formará. Las dos articulaciones son en realidad una única articulación, dividida y desplazada, pero con el mismo signo (es decir, con las líneas de articulación en el trasdós); dos articulaciones contiguas del mismo signo siempre pueden considerarse en este sentido como una articulación dividida, uno de cuyos componentes desaparecerá ante cualquier ligera asimetría. (Hay otras maneras en las que se pueden formar un exceso de articulaciones, pero estas articulaciones se pueden explicar de nuevo recurriendo a la simetría.)

El polo del polígono de fuerzas correspondiente al polígono funicular de la figura 2.6(f) está lo más cerca posible del polígono de fuerzas. Es decir, el valor del empuje en el apoyo, $H_{mín}$, tiene el menor valor posible. Análogamente, hay un valor máximo posible $H_{máx}$ que se puede determinar estudiando la figura 2.8. Los apoyos del arco están ahora demasiado cerca, y de nuevo se han formado tres articulaciones para acomodarse a la disminución del vano.

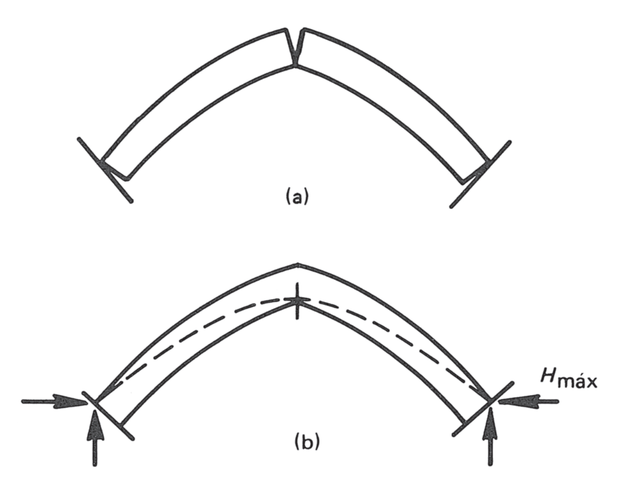


Figura 2.8

Las figuras 2.6(f) y 2.8(b) representan gráficamente las dos configuraciones extremas del polígono funicular. Los movimientos que provocan la formación de articulaciones se suponen pequeños, pero está claro que estos pequeños movimientos pueden forzar a la línea a adoptar dos posiciones muy diferentes. Sin embargo, para cada posición límite de la línea de empujes se puede calcular el correspondiente valor del empuje en el apoyo; $H_{\text{máx}}$ y $H_{\text{mín}}$ representan los límites superior e inferior de ese valor. Así, a pesar de la incertidumbre real sobre las condiciones precisas de apoyo del arco, es posible al menos obtener límites numéricos para al menos una cantidad estructural; el teorema de la seguridad no es una herramienta tan tosca como pudiera parecer.

La figura 2.9(a) muestra un arco semicircular que contiene confortablemente un polígono funicular dentro de la fábrica, y que, por lo tanto, es «seguro». Es evidente que un arco más delgado podría contener el mismo polígono funicular, es decir, un arco más delgado podría soportar con seguridad las mismas cargas, pero también está claro que hay un límite en la posible reducción del espesor del arco. Este límite se alcanza en la figura 2.9(b), y el arco está a punto de colapsar por la formación de un mecanismo de cuatro articulaciones; se muestran cinco articulaciones para el arco perfectamente simétrico de la figura 2.9(c).

Se podría considerar que el arco más delgado posible de la figura 2.9(b) está contenido dentro del arco real de la figura 2.9(a), y la proporción en la que el arco real debe «reducirse» para llegar a ser el más fino posible nos lleva a la idea de un coeficiente de seguridad geométrico. El concepto de un arco dentro de otro arco fue tratado en el primer capítulo; la figura 1.19 muestra la línea de empujes contenida dentro del tercio central de un arco. Sin embargo, la regla del tercio central surge del estudio del comportamiento elástico del material, mientras que el coeficiente geométrico de seguridad nace de un estudio de diagramas como los de las figuras 2.9(a) y (b), en los que se comparan las geometrías del polígono funicular y del propio arco.

De este modo, una regla de proyecto basada en un coeficiente geométrico de seguridad de 3 es, en realidad, exactamente equivalente a la regla del tercio central, a pesar de que las dos reglas se han concebido de manera muy diferente. Sin embargo, el valor de 3 es, desde el punto de vista del coeficiente geométrico de seguridad, arbitrario. Puede ser que otro valor, quizá menor de 3, sea apropiado para el proyecto de arcos. En este sentido cabe señalar que el establecimiento de un

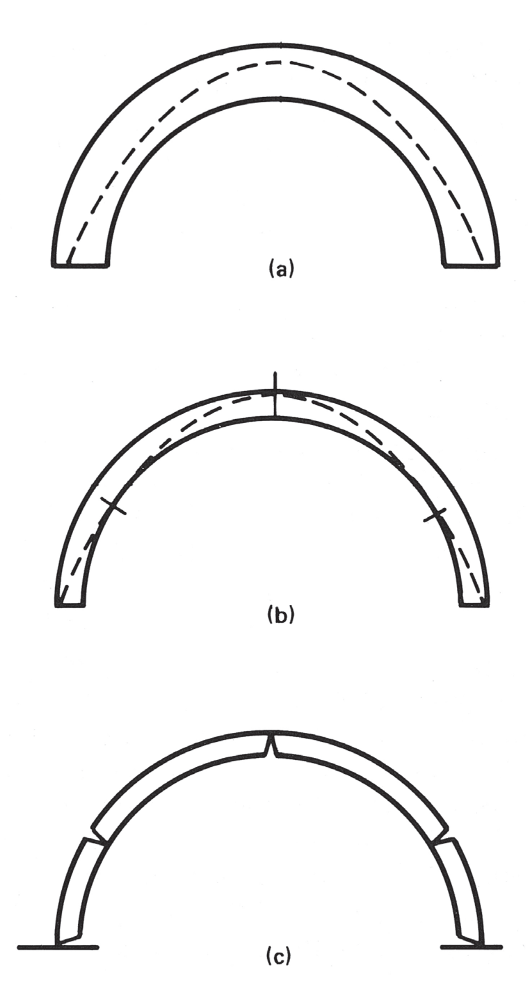


Figura 2.9

valor razonable del coeficiente de seguridad geométrico no es en sí mismo suficiente para asegurar un adecuado margen de seguridad del arco. Si las sobrecargas son razonablemente altas, entonces, como se verá, el coeficiente geométrico puede ser lo único que se necesita en un cálculo práctico. Pero (por poner un ejemplo trivial) si sobre el arco sólo actúa una carga permanente, entonces, la línea media del arco se proyectará para que coincida exactamente con la línea de empujes de esta carga. En este caso el coeficiente geométrico de seguridad para esa carga es teóri-

camente infinito, sea cual sea el espesor del arco, a pesar de que un arco delgado, incluso con la forma correcta, será en realidad potencialmente inestable.

Así, pues, una segunda estimación de la seguridad podría consistir en evaluar la resistencia del arco ante la acción de una carga que produzca una perturbación (por ejemplo, aplicar una carga puntual). En un caso real, se podría combinar la evaluación de la acción de esta «sobrecarga» con la evaluación geométrica. De esta manera, se podría elegir un valor apropiado para la carga puntual, y determinar el espesor mínimo del arco para contener una línea de empujes de la combinación de ambas cargas, la original y la carga de prueba. Este tipo de enfoque es el que se analiza en el capítulo 4.

Finalmente, se puede verificar la resistencia. Se ha supuesto que los niveles de tensiones son bajos, pero esto debe comprobarse en cualquier cálculo. Un valor de tensiones admisible llevará inmediatamente, por sí mismo, a un espesor mínimo del arco para una carga dada. Para vanos muy grandes, o para arcos muy rebajados que producen grandes empujes, puede ser que la resistencia del material condicione el proyecto. Para puentes de dimensiones normales, sin embargo, el valor límite de las tensiones no será generalmente el criterio crítico, a menos que se imponga un coeficiente de seguridad muy alto para las tensiones. En su lugar, es un mecanismo de colapso, resultado de una disposición adecuada de las articulaciones entre dovelas, el que probablemente será la base de la evaluación de la seguridad.

Mecanismos de colapso

Se ha señalado que el arco triarticulado es una forma estructural satisfactoria; está estáticamente determinado, y el polígono funicular para una carga dada es único. Es una cuarta articulación lo que convierte el arco triarticulado estáticamente determinado en un mecanismo. En la figura 2.10(b) un arco semicircular, idealizado, soporta su peso propio y una carga puntual. Si imaginamos que el valor de esta carga aumenta lentamente, el peso propio del arco tendrá cada vez menos efecto en la forma del polígono funicular; en el límite, la línea de empujes consistirá en las dos líneas rectas que se muestran (cf. figura 1.14). Para las dimensiones concretas mostradas en la figura 2.10(b) es evidente que una carga puntual suficientemente grande no podría ser resistida por dos líneas de empuje rectas contenidas totalmente dentro de la fábrica; al incrementarse el valor de la carga puntual, llegará un

punto en que el arco colapse mediante el mecanismo de cuatro articulaciones mostrado en la figura 2.10(c).

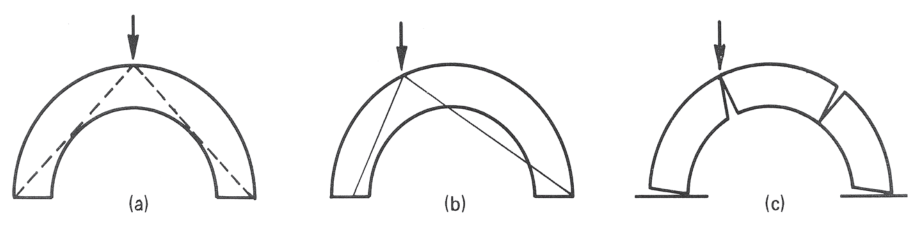


Figura 2.10

El arco ideal se ha dibujado con unas proporciones muy concretas; en la figura 2.10(a) puede verse que las líneas de empuje rectas producidas por una carga puntual situada en la clave se *pueden* dibujar dentro de la fábrica. Según el teorema de la seguridad, el arco podría soportar una carga puntual de cualquier valor en la clave (siempre que no se supere la resistencia del material a rotura). La contraparte de este teorema es que no hay ninguna disposición de articulaciones, con una articulación en la clave, que conduzca a un mecanismo de «cuatro bielas» del tipo indicado en la figura 2.10(c).

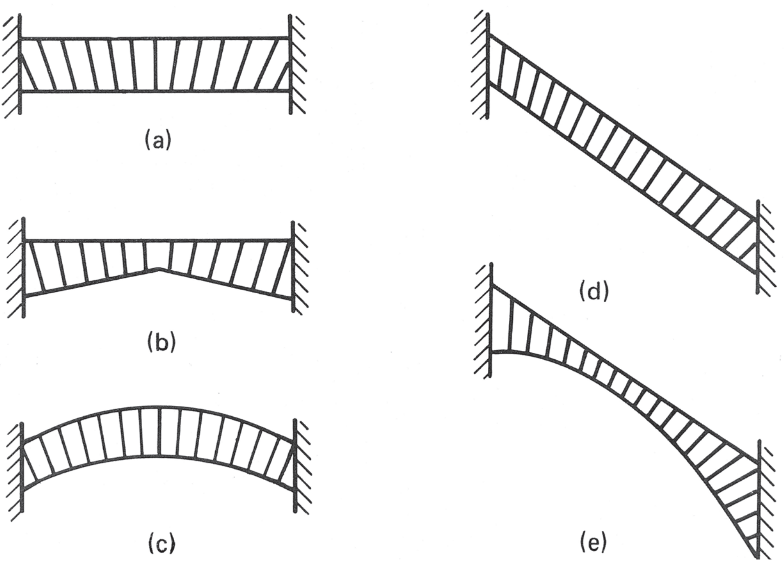


Figura 2.11

El mecanismo de cuatro bielas es el mecanismo básico de colapso de un arco. De hecho, hay muchas estructuras para las que no se puede concebir ningún patrón de articulaciones que conduzca a un mecanismo de cuatro bielas; tales estructuras son, dentro del marco de las hipótesis sobre el comportamiento del material, infinitamente resistentes. El arco plano entre apoyos rígidos de la figura 2.11(a) es una de estas estructuras «perfectas»; no hay ninguna disposición de articulaciones en el trasdós y en el intradós del arco que conduzca a un mecanismo de colapso. El arco plano puede soportar cualquier sistema de cargas; los otros arcos de la figura 2.11 son variaciones del arco plano.

Para hacer una evaluación de la resistencia de los arcos reales se hará uso por un lado de estas ideas de mecanismos de colapso, y por otro, de las posiciones seguras de las líneas de empujes. Una breve revisión histórica del análisis de arcos servirá para ilustrar estas ideas antes de su desarrollo detallado.



Figura 2.12 Arcos planos en el Coliseo, Roma, siglo I dC

3
Notas históricas

La estática del empuje

En el capítulo 1 se señaló que la estática del problema de la cadena colgante es la misma que la del arco; las mismas técnicas de fuerzas y polígonos funiculares se pueden usar para ambos (cf. figuras 1.7 y 1.8). Ya en 1675 Robert Hooke se ocupó de «la verdadera forma matemática y mecánica de todos los tipos de arcos para edificios», y publicó la afirmación «Ut pendet continuum flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum» —«del mismo modo cuelga el hilo flexible, así, pero invertido, se sostendrá el arco rígido». Sin embargo, aunque Hooke tuvo esta idea, que manifestaba una comprensión profunda del comportamiento del arco, no había conseguido resolver la estática del problema; su publicación en forma de anagrama pretendía preservar su prioridad en el caso de que otro académico se tropezara con la misma idea.

Hooke ya había realizado algunos experimentos con modelos de arcos para la Royal Society, pero no fue hasta después de su muerte, en 1703, cuando se publicó la solución del anagrama. Entretanto, David Gregory había aplicado el recién inventado cálculo diferencial para hallar la forma de la cadena colgante, y en 1697 publicó la formulación matemática de la catenaria. Su trabajo, que pretendía probar otras afirmaciones no demostradas de Huygens, Leibniz, y John Bernoulli, realizadas en 1690-91, contenía algunos errores. Lo que interesa ahora es un comentario de Gregory (traducido del latín por Ware):

> En un plano vertical, pero en posición invertida, la cadena conservará su forma sin caer y, por consiguiente, constituirá un arco o 'fornix' muy delgado; es decir, infinitas esferas

> pequeñas, rígidas y pulidas, dispuestas según la forma de una catenaria invertida formarán un arco; ninguna de sus partes será empujada hacia fuera o hacia dentro por las otras, y si la parte más baja permanece firme, se soportará a sí misma gracias a su forma… La verdadera y legítima forma de un arco o «fornix» no es otra que la catenaria. *Y si arcos de otras formas se sostienen es porque hay alguna catenaria contenida en su espesor*. Y no se sostendría si fuera muy delgado o estuviera compuesto de partes muy pulidas, que pudieran deslizar.

La afirmación en cursiva (énfasis de Ware) es, por supuesto, nada menos que el teorema de la seguridad o del límite inferior de la plasticidad, y la idea fue brillantemente utilizada por Poleni en su análisis de la cúpula agrietada de San Pedro. La figura 3.1 reproduce la lámina D de Poleni, y muestra su completo entendimiento del estado del conocimiento en su época. En la parte inferior derecha está la cadena colgante de Hooke, y arriba, el arco de «pequeñas esferas rígidas y pulidas» (este último basado en una ilustración del libro de Stirling de 1717).

En San Pedro unas grietas meridianas habían dividido, de hecho, la cúpula en porciones con forma aproximada de husos semiesféricos (como gajos de naranja) del tipo mostrado esquemáticamente en el boceto de la derecha de la figura XIII, en la figura 3.1. Poleni dividió la cúpula, hipotéticamente, en cincuenta gajos, y consideró la estabilidad de un arco formado por dos gajos opuestos; afirmó explícitamente que la estabilidad quedaría asegurada si «nuestra cadena puede situarse completamente dentro del espesor del arco» y, además, que si cada arco individual es estable, también lo será la cúpula completa. Estas dos afirmaciones son correctas.

La forma real de la cadena fue hallada por Poleni, cargando un hilo flexible con pesos proporcionales a cada parte del gajo. Esta línea de empujes, obtenida experimentalmente, se encontraba de hecho en el interior del espesor de la cúpula y Poleni concluyó que las grietas meridianas no eran peligrosas. Es más, el análisis suministra un valor para el empuje horizontal de la cúpula en su base, y Poleni estuvo de acuerdo con las recomendaciones previas de colocar cadenas adicionales en la base para contener este empuje.

Casi exactamente cien años después, en 1846, Barlow construyó una serie de modelos para explicar el empuje de los arcos ante la Institución de Ingenieros Civiles. Uno de los experimentos se ocupó de nuevo de la equivalencia entre la cadena colgante y el arco invertido (figura 3.2), y el arco semicircular mostrado tiene el

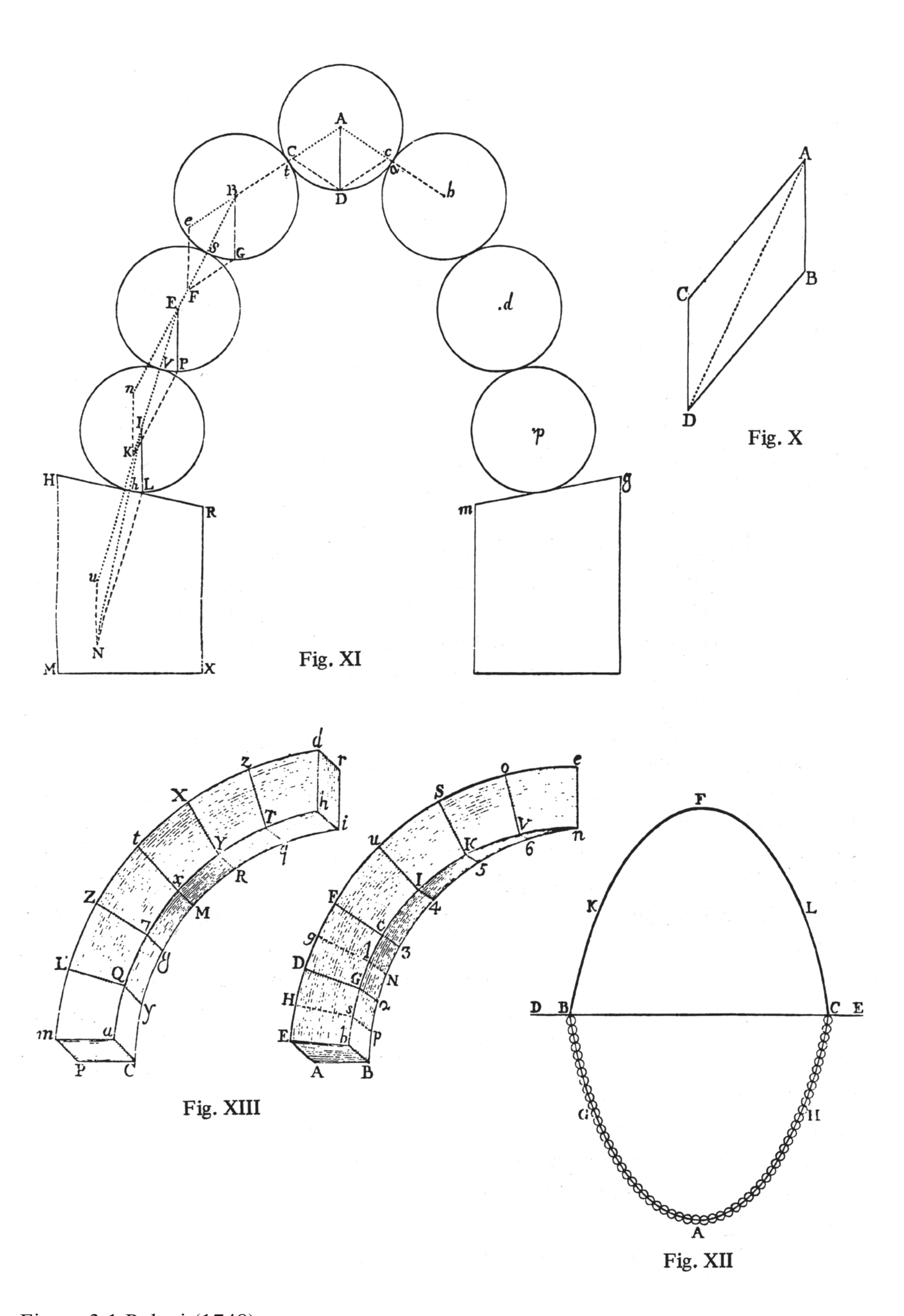


Figura 3.1 Poleni (1748)

espesor mínimo posible, cf. figuras 2.9(b) y (c). Además, la triangulación de las fuerzas en el soporte izquierdo de la cadena de la figura 3.2 fue usada por Barlow, igual que por Poleni antes que él, para calcular la componente horizontal del empuje en el apoyo del arco correspondiente.

En otro experimento se colocaron seis dovelas, como muestra la figura 3.3, con el «mortero» en cada junta en forma de cuatro pequeñas piezas de madera, cada una de las cuales se podía quitar con la mano. En cada junta se podían retirar tres de las cuatro piezas, en diferentes configuraciones, y así se hacían «visibles» posiciones alternativas de la línea de empujes; las tres líneas mostradas en la figura 3.3 se pueden comparar con las de las figuras 2.6(b), 2.8(b) y 2.9(a).

Barlow era plenamente consciente de que hay un número infinito de estados de equilibrio para un arco de fábrica, y de que el arco es, en realidad, estáticamente indeterminado. En 1879 se desarrollaron completamente las nociones de indeterminación estática, y Castigliano aplicó en su libro los teoremas que llevan su nombre a la resolución del arco de fábrica. Sabía que no podían transmitirse tracciones entre dovelas tomadas en seco o con un mortero pobre. Pero si una sección del arco se agrietaba (como en la figura 1.18(e)), entonces las propiedades de flexión en esa sección se veían afectadas, y Castigliano mostró un método de prueba y error para localizar la posición de la línea de empujes. Su solución, por tanto, era para un arco construido con un material elástico que no resiste tracciones.

En 1854, a Yvon Villarceau no le preocupaban estas claras nociones de indeterminación estática y no intentó encontrar «la» solución al problema de la posición de la línea de empujes. En su lugar, desarrolló un método de proyecto «seguro» haciendo que la línea media del arco coincidiera con una de las posibles líneas de empujes para una carga dada. Este método de proyecto inverso requiere la solución numérica de las ecuaciones, y los resultados se dan en forma de tablas que pueden usarse directamente en cálculos estándar por un proyectista de puentes. El trabajo de Yvon Villarceau era complejo, y su memoria para la Academia Francesa larga, pero los resultados eran muy precisos.

Inglis da la solución exacta de este tipo de proyecto inverso de Yvon Villarceau. La figura 3.4 muestra un arco de dovelas que soporta una calzada horizontal; se supone que el relleno tiene un peso específico uniforme y que actúa como una carga vertical sobre el arco. Si el origen de coordenadas se toma en la superficie de la calzada, sobre la línea media del arco, y la ecuación de la línea media del arco es

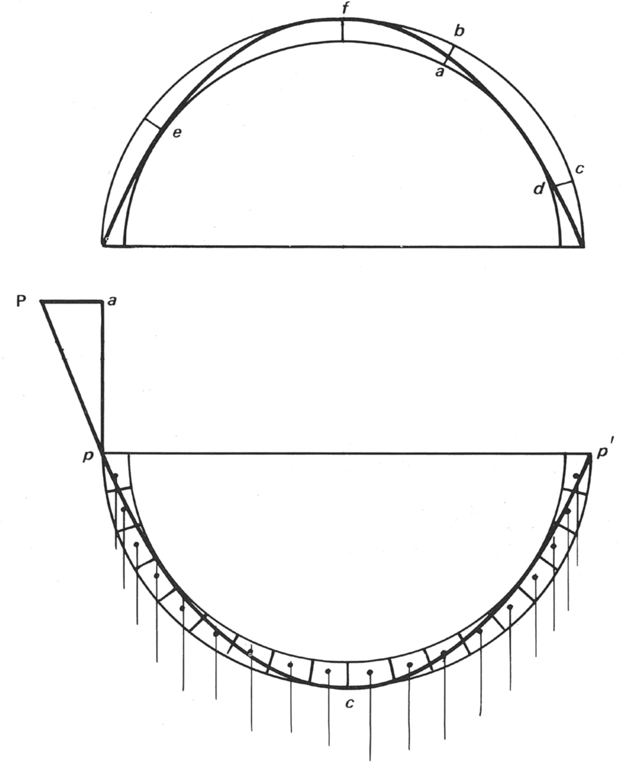


Figura 3.2 Barlow (1846)

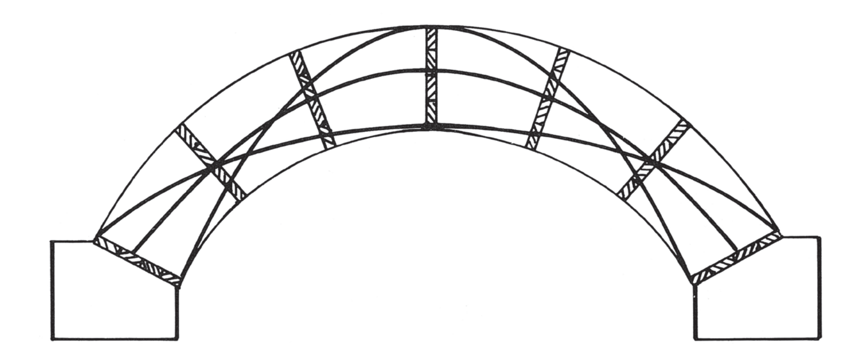


Figura 3.3 Barlow (1846)

$y = y(x)$, entonces la intensidad de la carga vertical por unidad horizontal es ky. El problema planteado por Inglis es la determinación de la línea media del arco, de manera que coincida con la línea de empujes resultante de la carga permanente; es decir, cada elemento diferencial del arco estará sometido a las cargas de la figura 3.5. En esta figura se ve que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(P\cos\psi) = 0 \tag{3.1}$$

ó

$$P\cos\psi = H \tag{3.2}$$

donde H es el valor de la componente horizontal del empuje en el apoyo, y así

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(P\,\mathrm{sen}\,\psi) = ky\,, \tag{3.3}$$

es decir

$$H\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(P\tan\psi) = ky\,, \tag{3.4}$$

ó

$$H\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = ky\,. \tag{3.5}$$

De modo que si la altura del relleno en la clave es a, entonces

$$y = a\cosh\alpha x\,, \tag{3.6}$$

donde $\alpha^2 = k/H$.

Finalmente, si la flecha del arco es h,

$$a + h = a\cosh\frac{\alpha l}{2}\,, \tag{3.7}$$

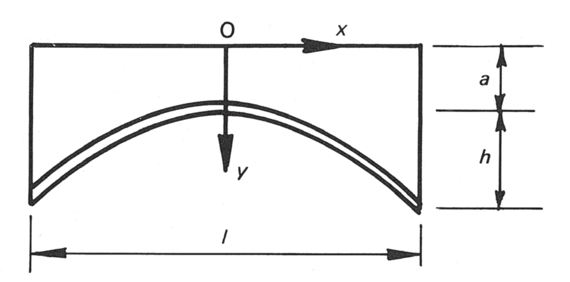


Figura 3.4

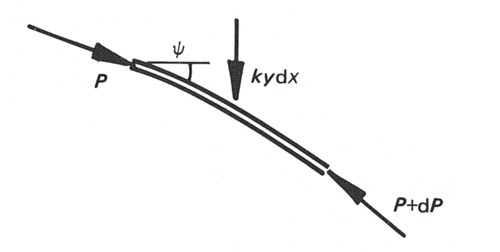


Figura 3.5

y la ecuación buscada de la línea media del arco, es decir, (3.6) se convierte en

$$y = a \cosh\left\{\frac{2x}{l}\cosh^{-1}\left(\frac{a+h}{a}\right)\right\} . \qquad (3.8)$$

La ecuación (3.8) representa una familia de curvas de parámetro h, y se corresponde con el número infinito de posibles posiciones para la línea de empujes. Un proyecto real podría, por ejemplo, especificar la luz l y la altura total $(a + h)$, pero el valor de h podría ser elegido por el proyectista.

Como ejemplo de la aplicación de la «ecuación de Inglis» (3.8), ésta se podría comparar con el perfil de un arco real. Yvon Villarceau recalculó varios puentes existentes, incluyendo el Pont d'Iéna (Lamandé 1809). Este puente, de cinco arcos, tiene unos 3 metros de flecha en cada vano de 25 m, y la proporción h/a es de alrededor de 2,0. El perfil exacto calculado por Yvon Villarceau difiere del perfil de Inglis de la ecuación (3.8) un máximo de unos 20 mm. No es posible construir un arco de fábrica de 25 m de luz cuyo perfil garantice una precisión de 20 mm después de descimbrar y de los consiguientes asientos.

Mecanismos de colapso

Las notas anteriores se refieren todas a trabajos relacionados principalmente con la construcción de líneas de empujes; es decir, se investigaba la estática del problema. Sin embargo, los métodos eficaces de Yvon Villarceau, o de Inglis, aunque establecen la forma correcta del arco, no dan información sobre el espesor del arco que asegure, en un sentido práctico, su estabilidad. En paralelo a los trabajos sobre el empuje de los arcos, otros autores (a veces el mismo autor) mostraron también las formas en que un arco de fábrica podía colapsar.

Así, en su primer intento de resolver el problema del arco en 1695, La Hire se ocupó sólo de la estática. El problema real a resolver era calcular el valor del empuje del arco, de manera que pudieran proyectarse estribos firmes ante el vuelco. La dificultad del análisis radica en las hipótesis que hay que realizar sobre el comportamiento de las dovelas del arco. En su análisis de 1695, La Hire supuso que una dovela podía deslizar libremente respecto a la contigua. Resolvió el problema construyendo un polígono de fuerzas, considerando el peso de las dovelas, y el correspondiente polígono funicular del arco. Para un arco de una forma dada con dovelas lisas, el polígono funicular está determinado y, trabajando hacia atrás, se puede deducir el polígono de fuerzas y finalmente el peso que deben tener las dovelas.

Ahora bien, si las líneas de arranque del arco son horizontales, se deduce que el peso de las dovelas de los arranques debe ser infinito; un arco finito de este tipo con dovelas lisas no se puede mantener en pie. La Hire llegó a esta conclusión, resultado de una hipótesis poco realista sobre el comportamiento del material, y señaló que en realidad el rozamiento entre las dovelas proporcionaría la estabilidad necesaria. Así, aunque el problema del arco no avanzó mucho con este trabajo, se desarrolló, sin embargo, la importante herramienta del polígono funicular.

La Hire volvió al problema en 1712, y aquí se consideró, al parecer por primera vez, la manera en que podría fallar un arco real. Señaló que si los estribos de un arco eran demasiado débiles para soportar el empuje, el arco se rompería en alguna sección entre los arranques y la clave. La junta LM de la figura 3.6 se toma como crítica, y el bloque LMF se considera entonces como una única dovela, al igual que el bloque LMI que descansa en el pilar IBHS. Así, en la figura 3.7, el empuje P se puede hallar considerando el equilibrio del bloque superior (La Hire dirigió correctamente este empuje tangente al intradós en L). Entonces, tomando momentos

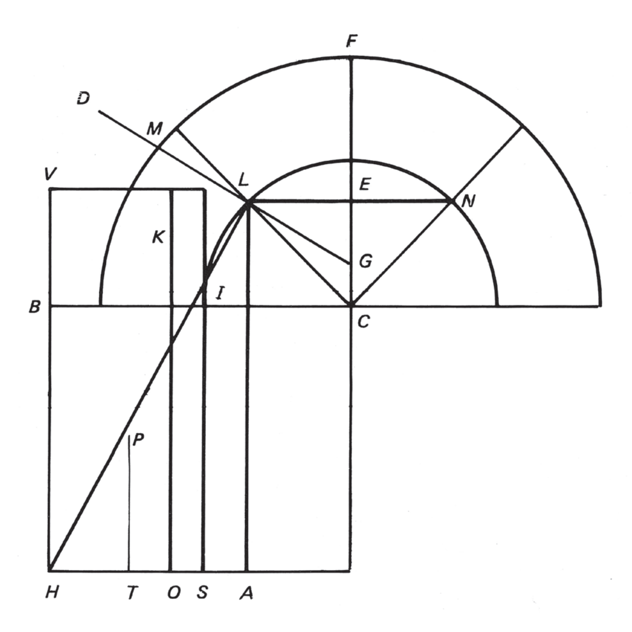


Figura 3.6 La Hire (1712)

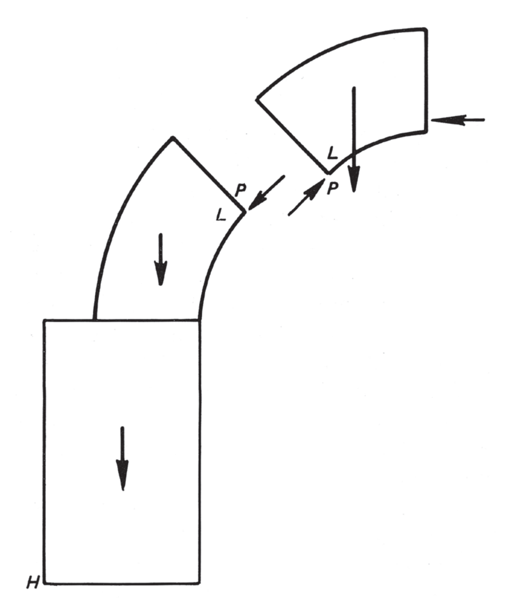


Figura 3.7 La Hire (1712)

respecto a H para la parte inferior del arco y el estribo, se puede obtener una ecuación que permite comprobar la estabilidad de toda la estructura.

La Hire no dio una regla para encontrar el punto crítico L. Las articulaciones del intradós son análogas a las mostradas esquemáticamente en la figura 2.6(c), pero el empuje en la clave de la figura 3.7 no actúa en el trasdós, y por tanto la tercera articulación no se ha formado. Sin embargo, el trabajo de La Hire es evidentemente una gran contribución; es más, su estimación del empuje en el apoyo es mayor que el mínimo necesario para la estabilidad, así que su procedimiento resulta ser «seguro».

El primer manual de ingeniería civil, la *Science des ingénieurs* de Bélidor de 1729, tiene un apartado sobre arcos que se basa firmemente en el trabajo de La Hire. Sin embargo, hay algunas diferencias; la sección crítica del arco se toma siempre a 45º, y el empuje (de valor $\sqrt{2}W$ donde W es el peso de la «dovela» LMF) no actúa en el intradós L, sino en el punto medio de la junta LM. Esto último incrementa ligeramente el espesor de los estribos para un empuje dado $\sqrt{2}W$, y, por lo tanto, el cálculo es de nuevo «seguro». En realidad, Bélidor no avanzó en la teoría del arco, pero formuló un conjunto de reglas prácticas de proyecto sobre la base del trabajo existente.

Estos eran los antecedentes de las dos notables memorias de Couplet sobre el empuje de los arcos de 1729 y 1730. El primero de estos artículos repite en realidad gran parte del trabajo previo de La Hire sobre arcos sin rozamiento, y consiste en poco más que un análisis de las líneas de empuje y el cálculo de las correspondientes fuerzas. Couplet sabía que todo esto tenía poco valor práctico, pero proporcionó un cálculo interesante de las fuerzas sobre la cimbra. Este tema tiene una importancia constructiva obvia, pero se había escrito poco sobre ello, si bien Pitot en 1726 dio detalles sobre las cimbras de madera e intentó realizar un análisis teórico.

El problema planteado por Couplet es el de un arco semicircular con dovelas iguales sin rozamiento sobre una cimbra lisa; la clave final (de muy poca anchura) no se ha colocado. En este estado, Couplet determinó la junta de la dovela, MV en la figura 3.8, por encima de la que las dovelas requerirán el soporte de la cimbra, y por debajo de ella se sujetarán por sí mismas. Dedujo que la junta que separa ambas situaciones se sitúa a 30º del apoyo, pero no se dio cuenta de que el grupo inferior de dovelas no estaba en equilibrio, y que su análisis necesitaba del desarrollo de fuerzas de tracción entre las dovelas y la cimbra.

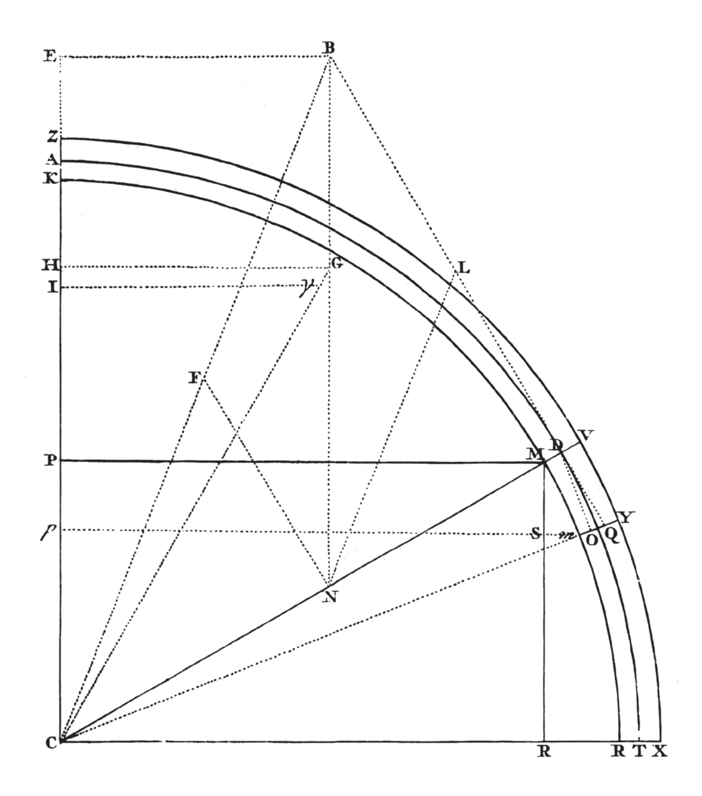


Figura 3.8 Couplet (1729)

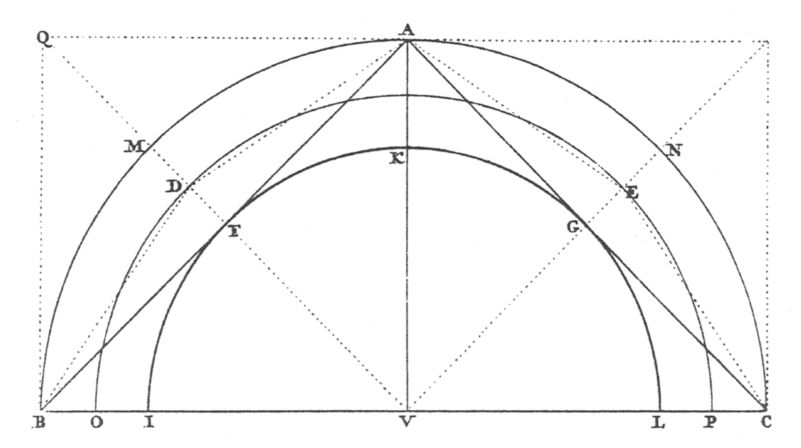


Figura 3.9 Couplet (1730)

Es la segunda memoria de 1730 la que supone una importante contribución a la teoría del arco. En su introducción, Couplet establece con precisión las dos suposiciones claves sobre el comportamiento del material. Señaló que el rozamiento mantendría en realidad las dovelas fijas frente el deslizamiento, a la vez que no ofrecía resistencia a la separación entre ellas. No hace mención a la resistencia de la piedra con la que están construidas las dovelas, y eso implica que asumió que las tensiones son pequeñas de manera que la resistencia a rotura por compresión apenas tiene importancia.

Couplet, de hecho, enunció los tres postulados necesarios para situar la teoría del arco dentro de la teoría de la plasticidad: que la fábrica no tiene resistencia a tracción, que tiene resistencia a compresión infinita, y que no se puede producir deslizamiento entre dovelas. Además, su trabajo muestra las dos maneras de abordar cualquier problema estructural, la primera a través del equilibrio (la estática) en la que se consideran las líneas de empujes y la segunda a través de la deformación (mecanismos) en la que se construyen patrones de articulaciones.

El primer teorema del segundo artículo de Couplet contiene exactamente estos dos aspectos del comportamiento estructural. El teorema afirma que un arco no colapsará si la cuerda de medio trasdós no corta al intradós, sino que se sitúa dentro del espesor del arco. Couplet tiene en mente un arco de peso propio despreciable sometido a una carga puntual en la clave A (figura 3.9 (cf. figura 2.10(a)). Cualquiera que sea la magnitud de la carga, se puede transmitir directamente a los apoyos B y C, siguiendo las líneas de empujes rectas AFB y AGC. Además, según Couplet, para que el arco colapse el ángulo BAC se debe abrir, y esto sólo puede ocurrir si se separan los apoyos, lo que se descarta por hipótesis; en realidad, no hay ninguna disposición de articulaciones en el trasdós y el intradós, que sea compatible con una línea de empujes para la carga, y que permita la formación de un mecanismo de colapso.

Couplet comenta entonces el comportamiento del arco más fino BAC-ODEP. Si la clave A estuviera suficientemente cargada, entonces el ángulo DAE podría abrirse y los ángulos ADB y AEC podrían cerrarse, siempre que las partes BMDO y CNEP no tengan la suficiente masa para resistir el vuelco. Pero podría impedirse el colapso cargando los riñones. Es más, Couplet señaló que cuando este relleno se omite, en el consecuente posible fallo, los puntos más débiles del arco se encuentran habitualmente a igual distancia de los arranques y la clave.

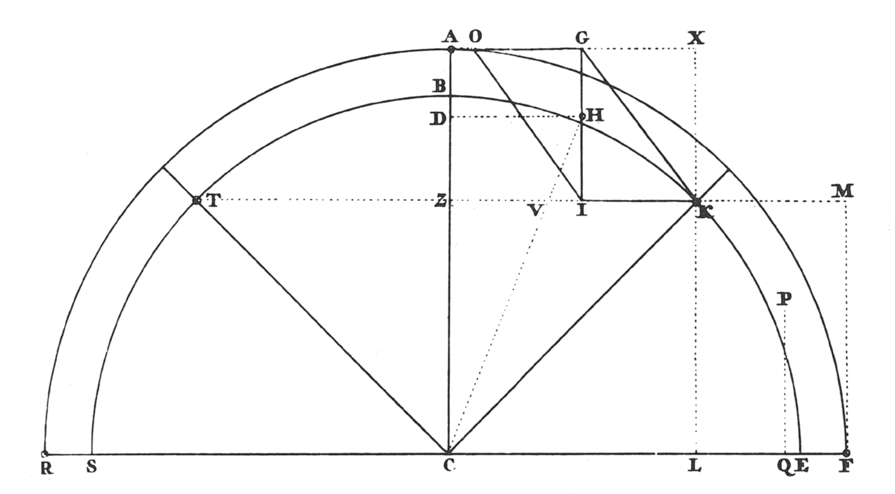


Figura 3.10 Couplet (1730)

Tras estos preliminares, Couplet abordó su primer problema, concretamente, encontrar el menor espesor que se le puede dar a un arco semicircular, considerando sólo su propio peso. El arco, según Couplet, colapsaría rompiéndose en cuatro partes, unidas entre sí mediante articulaciones (figura 3.10, cf. figura 2.9(c)). Las articulaciones T y K de los riñones están situadas a 45° de los arranques (es decir, «a igual distancia») y, al considerar el equilibrio del arco en este estado, se puede encontrar una única ecuación que relaciona el espesor del arco con su radio (medio). Couplet resolvió esta ecuación cúbica numéricamente para obtener que la relación necesaria entre el espesor y el radio t/R es 0,101.

La estática de Couplet es evidente en la figura 3.10. Para el equilibrio de la parte AK del arco, el empuje horizontal en A combinado con el peso que actúa a través de H conduce a un empuje en K según la línea GK. Ahora bien, GK no es tangente al intradós en K; Couplet se equivocó en este punto pero, por lo demás, el trabajo es correcto. Las articulaciones del intradós no se forman a 45º del apoyo sino a unos 31º; sin embargo, el análisis no es muy sensible a su posición exacta, y el valor correcto de t/R se incrementa sólo a 0,106.

En su segundo problema, Couplet repitió el análisis anterior para un arco circular que abarca 120º en lugar de 180º. El tercer problema se refiere a la determinación del valor del empuje del arco, y la solución de Couplet es esencialmente una

reelaboración del análisis de La Hire. Couplet abandonó su «análisis de colapso» y en su lugar trabajó desde una línea de empujes; concretamente, trabajó desde la línea media SX del arco, figura 3.11. El empuje en la clave actúa horizontalmente en S, y el peso de la mitad del arco en la línea LR; una simple triangulación de fuerzas da entonces la magnitud del empuje sobre el estribo, actuando en la línea LX. Este cálculo del empuje en el apoyo es necesario para la solución del cuarto y último problema de Couplet, concretamente, el cálculo de las dimensiones de los estribos para que toda la estructura sea estable; este es el problema al que se dirige todo el trabajo.

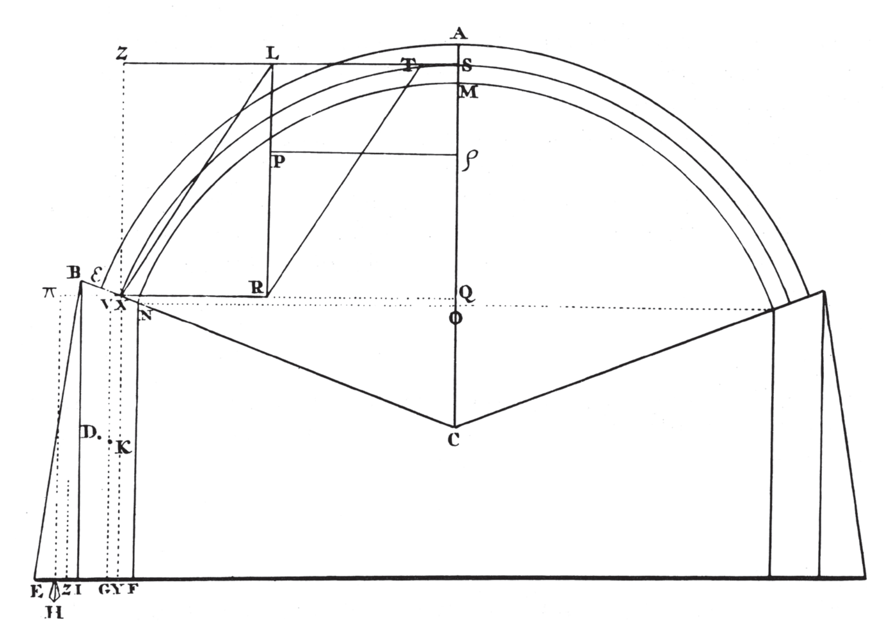


Figura 3.11 Couplet (1730)

La contribución de Couplet es excepcional. Couplet tenía ideas claras sobre las líneas de empuje y los mecanismos de colapso causados por la formación de articulaciones, expuso explícitamente sus hipótesis simplificadoras, y utilizó estas ideas para obtener una solución esencialmente correcta y completa al problema del cálculo de los arcos. Su trabajo tuvo un impacto inmediato, y fue recogido en los textos estándar (por ejemplo, el de Frézier de 1737-39).

En 1732 Danyzy confirmó experimentalmente la precisión del enfoque de Couplet. El trabajo fue realizado en Montpellier, y publicado oscuramente (y no hasta 1778). No obstante, los ensayos fueron conocidos y la figura 3.12 reproduce una lámina de Frézier, basada en una de las ilustraciones de Danyzy, que muestra el colapso de arcos hechos con pequeñas dovelas de yeso. (Nótese que la figura 241

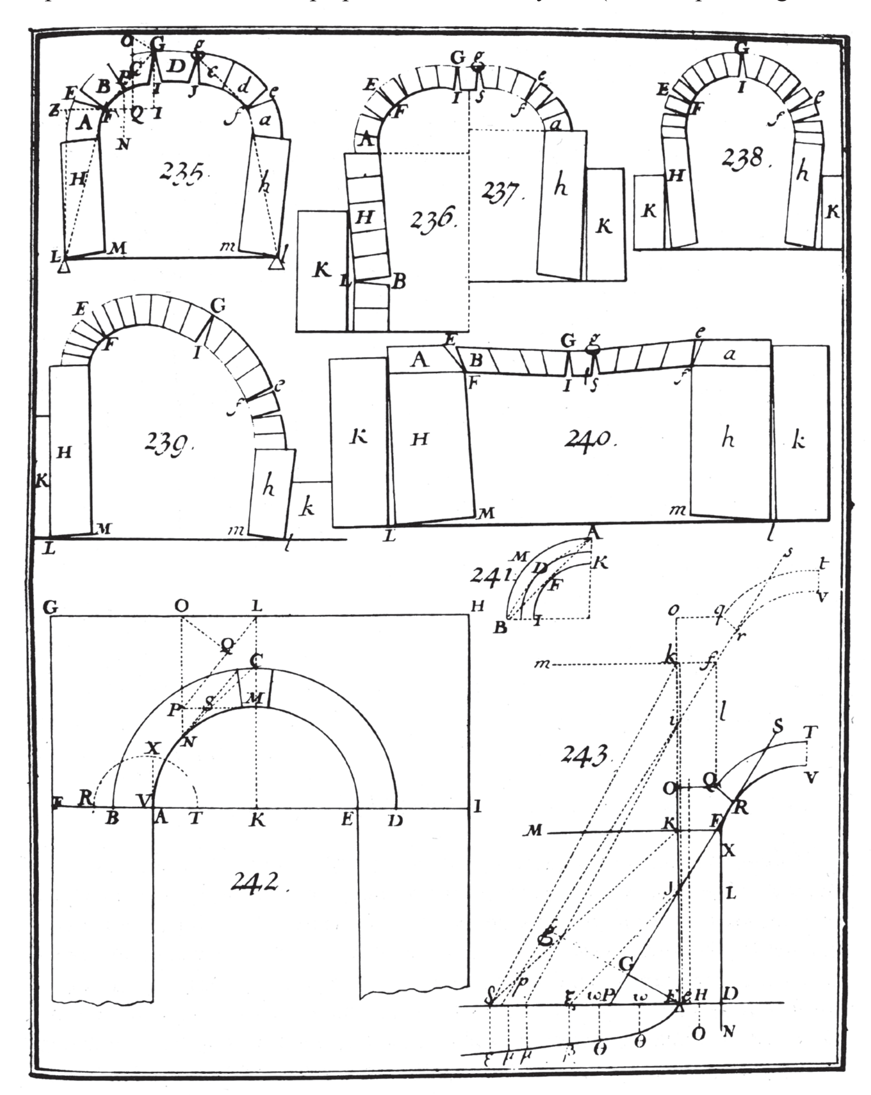


Figura 3.12 Frezier (1737-39)

de Frézier es la mitad del arco de Couplet de la figura 3.9.) Todos los arcos mostrados están en el momento de colapso, con estribos de dimensiones mínimas. La figura 235, por ejemplo, reproduce exactamente (aparte de la doble articulación en la clave) el mecanismo de colapso previsto por Couplet (figura 3.10). El arco plano de la figura 240 (cf. figura 2.11) es, en el marco de las hipótesis, infinitamente resistente; sólo puede colapsar si los estribos ceden.

A pesar de la difusión dada a la obra de Couplet, ésta se fue olvidando lentamente; Poleni la conocía en 1748, pero Coulomb no parece conocerla en sus famosas memorias de 1773 sobre «algunos problemas de estática». Sin embargo, Coulomb vivió de joven en Montpellier, y allí conoció a Danyzy, por lo que parece cierto que conocería el colapso de los arcos por formación de articulaciones. De hecho, si el rozamiento es lo suficientemente grande entre las dovelas como para evitar el deslizamiento (y esta afirmación fue hecha claramente por Coulomb) entonces concluye que las articulaciones son el único modo posible de colapso.

En la figura 3.13, de Coulomb, la mitad de un arco se mantiene en equilibrio mediante un empuje horizontal *H* a través del punto f en la clave. Si este empuje se reduce a un valor suficientemente pequeño, entonces todo el bloque GaMm del arco podría girar alrededor del punto M del intradós; para el arco en este estado, es una cuestión de estática simple determinar el valor correspondiente del empuje como:

$$H = \phi \left(\frac{\mathrm{gM}}{\mathrm{MQ}}\right) , \tag{3.9}$$

donde ϕ es el peso de GaMm actuando en la línea g'g. De manera similar, si el empuje es muy grande, el bloque GaMm podría girar alrededor del punto m del trasdós, y de nuevo el valor del empuje se puede calcular como

$$H = \phi \, \frac{\mathrm{g'q}}{\mathrm{mq}} \tag{3.10}$$

Así, Coulomb estableció los límites entre los que debe estar el valor del empuje horizontal si se quiere asegurar la estabilidad del arco. Sin embargo, la sección crítica Mm aún no ha sido determinada. Coulomb demostró que, si se consideran varias secciones transversales críticas (junto con diferentes posiciones del punto f de aplicación del empuje en la clave), entonces el valor máximo de *H* debe buscarse a partir de (3.9), y el mínimo a partir de (3.10). Todas estas ideas son correctas.

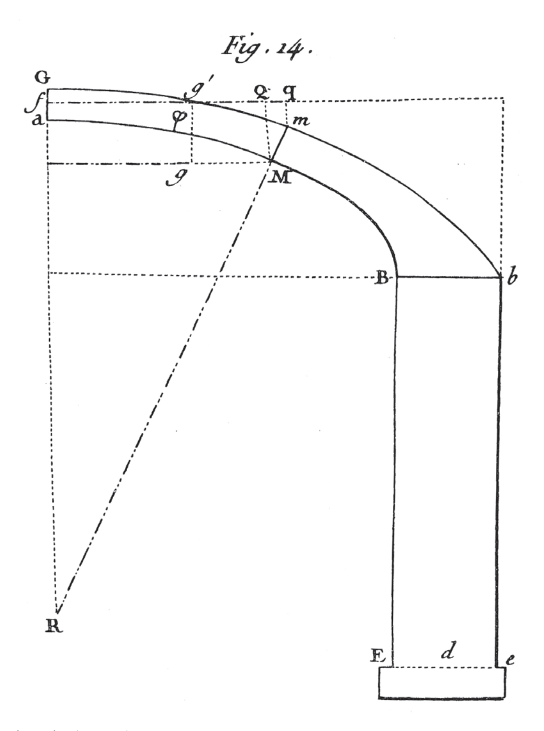


Figura 3.13 Coulomb (1773)

El trabajo de Coulomb combinando, afirmaciones rotundas de las propiedades del material con ideas de líneas de empuje por un lado, y mecanismos de articulaciones por el otro, da una extensa base teórica para el análisis y el proyecto de arcos. Sin embargo, este trabajo no se menciona en un libro publicado en 1810 destinado a los ingenieros de Ponts et Chaussées; en este volumen, editado por Lesage, un artículo de Boistard menciona únicamente la obra de Couplet y Prony. (En cambio, los trabajos de Coulomb sobre mecánica de suelos —el empuje contra un muro de contención— publicados en el mismo artículo de 1773, fueron adoptados inmediatamente; Prony, por ejemplo, en 1802 elaboró la teoría de suelos de Coulomb en un pequeño libro.)

Coulomb señaló que el método de tanteos de prueba y error para encontrar la sección crítica es muy preciso, ya que el máximo o mínimo es «plano»; esta insensibilidad quedó de manifiesto ya en el trabajo de Couplet, y Coulomb, de forma implícita, corrigió el error trivial de fijar la posición de la articulación del intradós a 45°.

Lamé y Clapeyron, que más tarde se distinguieron en más de un campo, eran en 1823 jóvenes oficiales del ejército, brillantes e ignorantes, y fueron llamados a evaluar la estabilidad de la cúpula de la catedral de San Isaac en San Petersburgo. Durante esta evaluación reinventaron prácticamente toda la teoría de Coulomb; además, repitieron el método de los cortes de Poleni, dividiendo la cúpula en gajos para su análisis. La teoría de arcos era de hecho conocida por los profesores, si no por los jóvenes estudiantes, y en 1826 Navier publicó sus *Leçons* para la escuela de Ponts et Chaussées, de modo que esta teoría se enseñaba también entonces en las escuelas de ingenieros.

En Inglaterra, ya se ha mencionado el artículo de Barlow de 1846 dirigido a los Ingenieros Civiles; Moseley desarrolló su propia teoría (algo confusa) en 1843, ignorando el trabajo de Coulomb, según el mismo reconoció. La teoría de arcos estuvo de hecho disponible a lo largo del siglo XIX, y las líneas de empujes y la «regla del tercio central» eran parte de los recursos del proyectista. Fuller dio su construcción para la línea de empujes en 1875, pero el arco de fábrica ya estaba obsoleto a mediados del siglo XIX (a principios del siglo XX Séjourné publicó en seis volúmenes un catálogo definitivo de puentes de fábrica de gran luz en todo el mundo). El Puente de Londres de Rennie, ahora demolido, fue terminado en 1831, y el puente de Thomas Harrison en Chester, con 200 pies (61 m), el puente de fábrica de mayor luz de Inglaterra, fue construido un año después. Estos fueron algunos de los últimos puentes de fábrica. El Iron Bridge en Coalbrookdale había sido construido en 1779; Telford ya había proyectado un arco de hierro fundido de 600 pies para el nuevo Puente de Londres.

Fleeming Jenkin sabía todo acerca de los arcos de dovelas, pero su largo artículo sobre puentes para la novena edición (1876) de la Enciclopedia Británica dedica, con razón, la mayor parte del espacio al hierro forjado y al acero, y poco a la fábrica. De hecho, parece que hubo poco trabajo adicional sobre el arco de fábrica, hasta bien entrado el siglo XX, y tal vez no había necesidad de más trabajo. Justo antes de la Segunda Guerra Mundial hubo un renovado interés, debido a la actividad de Pippard. Pippard hizo ensayos cuidadosos de modelos de arcos con dovelas de acero y demostró que la más mínima imperfección de ajuste (por ejemplo, en los apoyos) convertía una estructura aparentemente redundante en una estáticamente determinada. Como se verá en el próximo capítulo, esto condujo a una cierta simplificación del análisis, pero el enfoque de Pippard seguía siendo esencialmente

elástico, e interpretó sus resultados con respecto a los principios de la energía elástica mínima. Coulomb, un siglo y medio antes, había prefigurado los principios del análisis límite y las técnicas de la teoría plástica, pero el desarrollo completo de esa teoría no se produjo hasta después de la Segunda Guerra Mundial.

Experimento y práctica

Boistard, en su ensayo incluido en la colección de Lesage de 1810 para Ponts et Chaussées, había cubierto casi los mismos terrenos experimentales que Pippard, aunque los detalles de los ensayos eran diferentes. Además, sus ensayos tenían un alcance más amplio; Boistard no sólo deseaba establecer modos de colapso en diversas condiciones de carga, sino que también deseaba establecer los requisitos mínimos de los estribos en el colapso (es decir, le interesaba el valor del empuje sobre el apoyo), e investigar las fuerzas sobre la cimbra durante la construcción.

Los ensayos de Danyzy de 1732 sobre arcos con dovelas de yeso no se habían ocupado de este último problema constructivo, aunque ya se ha dicho que Couplet había hecho una contribución teórica un poco antes. Boistard trabajaba a mayor escala que Danyzy; sus dovelas estaban cortadas de ladrillos y pulidas, y los arcos tenían luces de 8 pies (2,6 m). Sin embargo, Boistard se contentó con registrar sus observaciones, y no hizo ningún cálculo.

Los primeros ensayos de modelos de arcos parecen haber sido realizados por Gautier en 1717 usando dovelas de madera. Gautier da reglas numéricas de proporción para los puentes, relacionando el grosor de los estribos y el grosor de las pilas interiores (para puentes de varias luces) con la luz del arco. Enunció claramente cinco problemas cuya solución era necesaria:

(1) el espesor de los estribos para todo tipo de puentes;
(2) la dimensión de las pilas interiores como una proporción de la luz de los arcos;
(3) el espesor de las dovelas entre el trasdós y el intradós en la proximidad de la clave;
(4) la forma de los arcos;
(5) las dimensiones de los muros de contención para retener el suelo.

(Coulomb abordó este quinto problema, así como el problema de los arcos, en su artículo de 1773.)

El primer problema de Gautier era el problema fundamental del proyecto de puentes; lo que todos los investigadores trataron de hacer, desde La Hire en adelante, fue resolver el problema mediante el uso de la mecánica en lugar de hacerlo empíricamente. En realidad, ya existían reglas empíricas para el proyecto de los estribos; en el siglo XVII se conocía la «regla de Blondel», que se describe a continuación (Bélidor se ocupó de señalar las deficiencias de la regla de Blondel), y en el siglo XVI se pueden encontrar reglas similares, por ejemplo, en los escritos del arquitecto español Rodrigo Gil de Hontañón.

François Derand ya había expuesto la regla de Blondel, y la figura 3.14 está basada en una de las láminas de Derand de la edición de 1743. El intradós del arco está dividido en tres partes de la misma longitud AB, BC y CD en la figura 3.14(a); CDF es una línea recta con CD igual a DF, y el punto F define el borde exterior del estribo. En el caso del arco semicircular, el espesor del estribo es una cuarta parte de la luz (Gil de Hontañón menciona esta misma proporción); en las figuras 3.14(b) y (c) se muestra la construcción para arcos de diferentes formas. Bélidor señaló que la regla no tiene en cuenta el espesor del arco, ni la altura de los estribos. Al menos la segunda crítica tal vez no tenga importancia; Moseley demostró más tarde que se podía asignar un espesor finito a los estribos que soportan un determinado empuje, independientemente de su altura. Además, la tendencia que se muestra en la figura 3.14 es al menos intuitivamente correcta; los arcos rebajados darán lugar a grandes empujes, y deberán estar provistos de estribos más grandes.

La regla de Blondel no dice nada de las pilas interiores. Las pilas interiores de los puentes medievales tenían anchuras grandes comparadas con la luz (por ejemplo, el viejo puente de Londres, o el puente todavía existente en Bideford, o el Pont d'Avignon); la proporción típica espesor/luz podía estar entre 1/4 y 1/6. Estas grandes obstrucciones a la corriente del río conducen a un círculo vicioso de daños y reparaciones: el aumento del caudal del río a través de los arcos de pequeña luz causa una erosión alrededor de las bases de las pilas, que deben ser recrecidas mediante tajamares para reparar los daños; el caudal crece y las pilas deben ser recrecidas de nuevo. La regla del propio Gautier era de 4/15 de la luz para los estribos, pero 1/5 para las pilas interiores.

En estas proporciones hay una intención evidente hacia un avance que realizó plenamente por primera vez Perronet, en el que las pilas interiores se reducen drásticamente de grosor. En un puente de varios tramos, con vanos más o menos iguales,

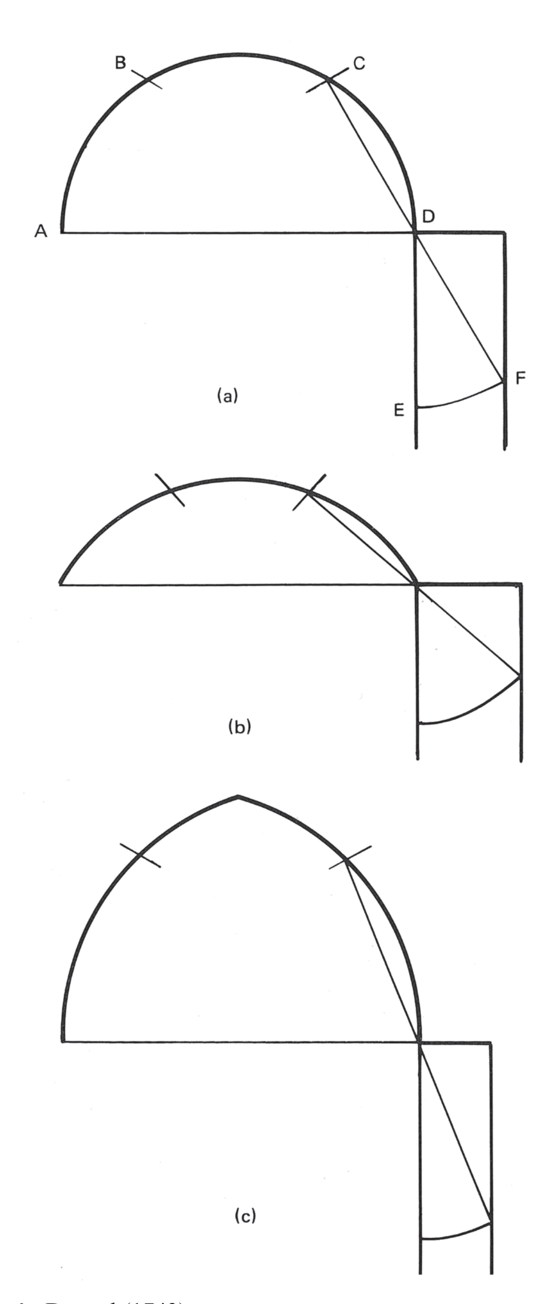


Figura 3.14 Según Derand (1743)

las pilas interiores soportan poco más que fuerzas verticales, estando los empujes horizontales de los tramos adyacentes aproximadamente auto-equilibrados. En su primer gran puente sobre el Sena, el Pont de Neuilly, 1768-74, Perronet redujo las pilas interiores a 1/9 de la luz. El precio a pagar durante la construcción por esta reducción de la fábrica, fue que las cimbras de todos los vanos (cinco en Neuilly) deben ser bajadas simultáneamente; las cimbras no pueden ser retiradas hasta que todos los arcos, junto con el suficiente relleno, han sido construidos.

El puente fue todo un éxito, sobre todo en la operación de descimbrado, en la que los cinco arcos se liberaron simultáneamente en presencia del Rey y de la Corte. Perronet tenía un conocimiento profundo de las propiedades del perfil elegido y su cimbra. Había calculado que cada tramo de fábrica bajaría 15 pulgadas cuando se liberara; en realidad, el descenso fue de 13 pulgadas inmediatamente, seguido de 10½ pulgadas, para hacer un total de cerca de 2 pies en cada tramo de 128 pies.

Perronet había sido nombrado en 1747 primer director de la recién fundada École des Ponts et Chaussées, y tenía una gran influencia como profesor y proyectista. Fue su alumno, Gauthey, quien asimiló y compiló todo el trabajo teórico y experimental sobre los puentes acumulado por Ponts et Chaussées a principios del siglo XIX. Su Tratado en tres volúmenes (editado en 1809 por Navier) es una historia de la construcción de puentes, un estudio de los puentes existentes, un manual de arquitectura y, sobre todo, un manual de proyecto y construcción de arcos de fábrica, junto con sus especificaciones y costes.

El problema técnico del arco de fábrica había sido eficazmente resuelto, y los trabajos posteriores tendían a ser escritos para el mundo «científico» más que para el de la «ingeniería». Así, el artículo de Yvon Villarceau, publicado en 1854, había sido presentado a la Académie des Sciences en 1845; su método de proyecto inverso, presentado en forma de tablas, unido al manual de Gauthey, podría ser utilizado hoy en día con confianza y economía.

4
La resistencia de los arcos

Muchos puentes de ladrillo y fábrica están en uso soportando tráfico rodado o ferroviario. Hasta la Segunda Guerra Mundial la carga en las carreteras era relativamente ligera; desde entonces, los vehículos han incrementado considerablemente su peso, y no se puede suponer que un puente medieval será capaz de soportar cualquier vehículo de los que circulan en la actualidad. En consecuencia, los responsables del mantenimiento de estos puentes, se preocupan de establecer su seguridad, y, en particular, tratan de estimar los valores seguros de sobrecarga para un puente determinado. El problema fue abordado de una manera sistemática por el Military Engineering Experimental Establishment (MEXE) tras la guerra, en un intento de establecer un sistema de clasificación de cargas militares; este trabajo fue desarrollado en 1967 (y revisado en 1973) por el Ministerio de Transportes, que emitió un memorándum técnico que se describe brevemente más adelante.

Estos estudios sobre arcos de fábrica se basaron en los artículos de Pippard anteriores a la guerra, y él mismo desarrolló sus análisis e informó de sus hallazgos en *Civil engineer in war*, en 1948.

El método «elástico» de Pippard

Pippard comenzó con la observación de que una ligera apertura de los apoyos de un arco de dovelas produciría normalmente articulaciones en los apoyos. Sin embargo, ignoró el hecho de que también se forma una tercera articulación, convirtiendo

el arco en una estructura triarticulada estáticamente determinada (cf. figura 2.6(a)); en su lugar, Pippard analizó un arco biarticulado.

El puente a tratar se muestra en la figura 4.1; la superficie del relleno es horizontal y, para su análisis, el arco se remplaza por el nervio biarticulado situado en su línea media de la figura 4.2. Esta es la primera de una serie de simplificaciones hechas por Pippard con el fin de obtener valores razonables para las cantidades estructurales; sus hipótesis no son siempre explícitas, pero el análisis, resumido por él mismo en 1948, puede ser reconstruido a partir de su libro de 1943.

Así, Pippard, al igual que Castigliano antes que él, se interesó por una solución «elástica» al problema del arco. Sin embargo, a diferencia de Castigliano, Pippard se contentó con analizar un nervio hipotético coincidente con la línea media del arco, y no siguió en detalle el agrietamiento de la fábrica en los apoyos. En realidad, las soluciones de Castigliano para diversas hipótesis alternativas sobre el comportamiento del mortero dieron valores del empuje en los apoyos dentro del 4% de la media. Esta aparente insensibilidad se comenta más adelante; se puede señalar aquí que la hipótesis de articulaciones simples en los apoyos no tendrá un efecto destacado en el valor del empuje en el apoyo.

Así, si se sitúa una carga puntual *W* en la clave del arco, (figura 4.2) —y este era el caso considerado por Pippard— el momento flector M_x en cualquier sección se puede definir en función del empuje desconocido *H* en el apoyo. Por supuesto, la forma del arco debe ser conocida, y Pippard tomó un arco parabólico; es decir, limitó su análisis al caso para el que r_q/r_c = ¾ en la figura 4.1. La energía de deformación *U* para el arco puede ser formulada ahora en la forma habitual como

$$U = 2\int_{x=0}^{x=l/2} \frac{M_x^2}{2EI}\mathrm{d}s \qquad (4.1)$$

donde d*s* es el diferencial de longitud del arco. De esta manera, el valor de *H* se obtiene de la solución a la ecuación

$$\frac{\partial U}{\partial H} = \int_{x=0}^{x=l/2} \frac{M_x}{EI}\frac{\partial M_x}{\partial H}\mathrm{d}s = 0 \ . \qquad (4.2)$$

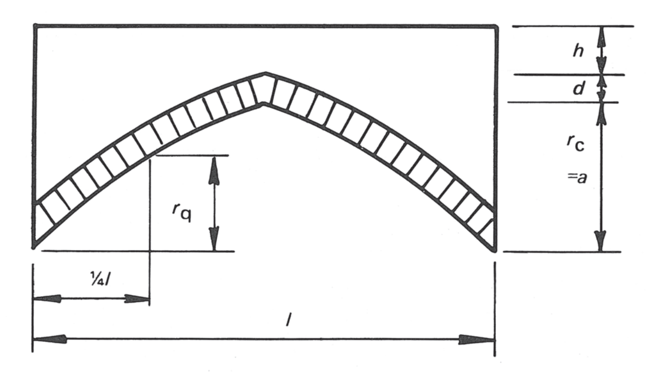


Figura 4.1

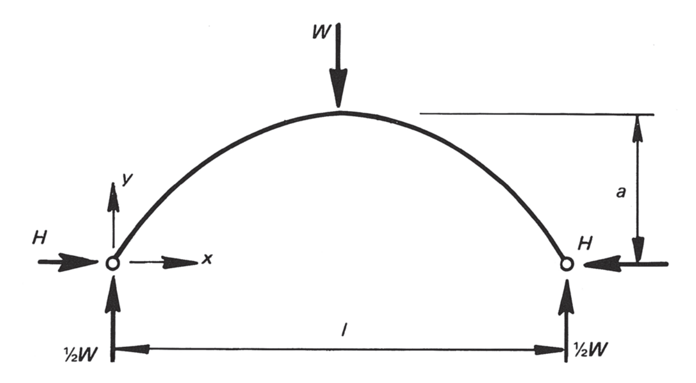


Figura 4.2

Para simplificar la integral, Pippard supuso que la sección del arco variaba de tal manera que

$$I = I_0 \frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dx}} \quad , \tag{4.3}$$

de modo que (4.2) se convierte en

$$\int_0^{l/2} M_x \frac{\partial M_x}{\partial H} \, \mathrm{d}x = 0 \quad . \tag{4.4}$$

La ecuación (4.3) implica que la sección del arco crece desde la clave hacia los apoyos.

La solución de (4.4) para el caso de carga de la figura 4.2 da el valor H_L del empuje de la sobrecarga en el apoyo:

$$H_L = \frac{25}{128}\left(\frac{l}{a}\right)W \quad . \tag{4.5}$$

En correspondencia, el valor del momento flector en la clave del arco es

$$M_L = -\frac{7}{128}Wl \quad , \tag{4.6}$$

donde el signo negativo indica que la línea de empujes queda por encima del arco (momento flector positivo que estira la fibra inferior); la solución se muestra en la figura 4.3.

Las ecuaciones (4.5) y (4.6) dan los resultados esenciales que, combinados con las correspondientes expresiones resultantes del peso propio del arco ((4.7) y (4.8) más adelante), fueron usados por Pippard para estimar el valor seguro de la sobrecarga para un arco de cualquier forma. Sin embargo debe señalarse que estos resultados se han obtenido usando un método de análisis elástico, para un arco biarticulado de forma parabólica y para una sección que varía de acuerdo a (4.3). En realidad, ninguna de estas suposiciones tendrá mucho efecto en el valor del empuje sobre el apoyo H_L. Sin embargo, ya que el momento flector en la clave del arco está determinado por la diferencia de ordenadas entre la línea de empujes y la línea media del arco (es decir por la dimensión 7a/25 en la figura 4.3), un cambio relativamente pequeño en el valor de H_L puede tener un efecto mucho mayor en el valor del momento flector.

Además, Pippard limitó su análisis al de una carga puntual en la mitad del vano. La «peor» posición para una carga puntual se investigará más adelante. Pippard era consciente de que, en teoría, un arco es más débil ante la acción de una carga puntual a aproximadamente un cuarto de la luz que en la clave. Sin embargo, defendió —con razón— el uso del resultado de la carga central, basándose en la distribución de la carga desde la superficie de la calzada a través del relleno hasta el propio arco. Si se toma una cuña habitual de dispersión de la carga de 90º, el ancho efectivo del arco cuando la carga actúa en la clave es *2h*. Un ancho mayor del arco estará

disponible para soportar la carga puntual situada a un cuarto del vano, ya que la carga se distribuirá a través de un mayor espesor del relleno.

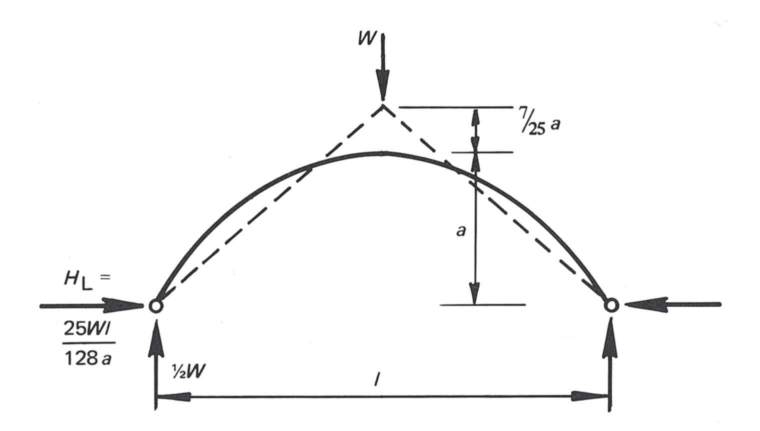


Figura 4.3

Los valores numéricos resultantes de (4.5) y (4.6) deben sumarse a las cantidades correspondientes resultantes del peso propio del arco y del relleno. Pippard consideró que el ancho apropiado del puente es $2h$; es decir, analizó un «nervio» contenido en el puente considerado, al menos en la clave, que soporta la sobrecarga. Es más, supuso que el relleno no tiene resistencia estructural, de manera que simplemente impone cargas verticales sobre el arco (esta fue la hipótesis considerada por Inglis, y señalada en el capítulo 3, figura 3.5), y que el relleno tiene el mismo peso específico σ que el arco. Un análisis adicional de energía de deformación da los valores del empuje del peso propio y del momento flector en la clave de

$$H_{\mathrm{D}} = \frac{\sigma l^2 h}{a}\left(\frac{a}{21} + \frac{h+d}{4}\right) \ , \tag{4.7}$$

y

$$M_{\mathrm{D}} = \frac{1}{168}\,\sigma l^2 a h \ . \tag{4.8}$$

Así, los efectos combinados de la carga puntual en la clave y el peso propio del arco (de ancho $2h$) son un empuje y un momento flector en el centro con valores

$$H = \frac{l}{a}\left\{\sigma lh\left(\frac{a}{21} + \frac{h+d}{4}\right) + \frac{25}{128}W\right\} , \tag{4.9}$$

y

$$M_c = \frac{1}{4}l\left(\frac{\sigma lah}{42} - \frac{7}{32}W\right) . \tag{4.10}$$

Las observaciones sobre la sensibilidad del valor del momento flector a las hipótesis que se han hecho para obtenerlo se aplican aún más al análisis del peso propio. La línea de empujes del peso propio es una curva simétrica suave que se aproxima a la línea media del arco parabólico (como debe ser para minimizar la energía de deformación); para los valores típicos de h, d y a, las ecuaciones (4.7) y (4.8) muestran que la línea de empujes en la clave queda por debajo de la línea media del arco sólo un pequeño porcentaje de la flecha a. Así, para un puente pequeño típico con $h=d=(1/4)a$, por ejemplo, (4.7) y (4.8) dan $M_D/H_D=a/29$.

Es más, las dos cantidades más sensibles se combinan en (4.10), y es éste el valor del momento flector que usó Pippard para obtener sus reglas de evaluación. Al ir aumentando el valor de W en la clave del puente, la línea de empujes resultante se separa más y más de la línea media del arco; el primer término en (4.10) se mantiene constante, mientras el segundo se incrementa. La consecuencia es que finalmente se desarrollarán tensiones de tracción.

Así, un primer criterio aplicado por Pippard se deriva de la regla del tercio central. O, más bien, Pippard sostenía que un criterio menos restrictivo podría basarse en la regla de la mitad central, en cuyo caso el valor límite de W vendría dado por la solución de

$$\frac{M_c}{H} = -\frac{1}{4}d , \tag{4.11}$$

que lleva a

$$W_1 = \frac{32\sigma lh\{2a^2 + 4ad + 21d(h + d)\}}{21(28a - 25d)} \qquad (4.12)$$

Por otra parte, Pippard también estudió el caso en el que la tensión de compresión en la fábrica alcanzaba el valor máximo permitido, y así consideró una segunda condición. Ya que el arco tiene un espesor d y un ancho eficaz $2h$, la tensión límite f se alcanzará cuando

$$f = \frac{H}{2dh} - \frac{3M_c}{hd^2} \ , \qquad (4.13)$$

y sustituyendo en (4.9) y (4.10) se obtiene

$$W_2 = \frac{\frac{256fhd}{l} + 128\sigma lh\left(\frac{a}{28d} - \frac{1}{21} - \frac{h + d}{4a}\right)}{\left(\frac{25}{a} + \frac{42}{d}\right)} \ . \qquad (4.14)$$

Pippard estudió las expresiones (4.12) y (4.14), que dan valores límites de W en los supuestos alternativos de tensiones de tracción cero (en realidad relajado por la regla de la «mitad central» para permitir algunas tensiones de tracción indeterminadas) y una tensión de compresión limitada. Pippard tomó un rango de ejemplos numéricos, y tenía disponibles los resultados de los ensayos a tamaño real de la Building Research Station. Como resultado, consideró seguro descartar (4.12) y usar la menos restrictiva (4.14). Es decir, el valor de W_2 (para los valores de las constantes elegidas por Pippard) es generalmente mayor que el de W_1, y Pippard permitió incluso violar su regla de la mitad central.

Para arcos pequeños la altura del relleno en la clave h es generalmente menor de 2 pies, de manera que el nervio eficaz correspondiente tendrá un ancho inferior a 4 pies; se puede considerar que dos nervios como este existen independientemente dentro del cañón del arco real. De esta manera la carga axial segura W_A para un vehículo de ancho de rodada normal se puede tomar como

$$W_A = 2W_2 \ . \qquad (4.15)$$

A partir de (4.14) y (4.15) Pippard creó unas tablas para un arco único estándar de perfil parabólico con una proporción luz/flecha $l/a = 4$. Consideró un peso específico del arco y del material de relleno de $\sigma = 0{,}0625$ ton/pie^3 (22 kN/m^3) y una tensión de compresión límite de $f = 13$ ton/pie^2 (14 N/mm^2).

De estas tablas se puede obtener el valor de W_A para diversos valores de la luz l, espesor del arco d y altura del relleno en la clave h. La importancia de estas tablas se discute más adelante a la luz de los avances adicionales realizados por el MEXE.

El método de evaluación MEXE/MOT

El Military Engineering Experimental Establishment encontró que la ecuación (4.14) podía ajustarse bastante bien, para determinados valores de σ y f, mediante un ábaco que considerase sólo la luz del arco l y el espesor total $(h + d)$ en la clave, y esta idea fue incorporada en el memorándum del Ministerio de Transporte de 1967. Así, pues, para un arco de dimensiones dadas, la carga axial provisional W_A puede obtenerse directamente, como se muestra esquemáticamente en la figura 4.4. La carga se considera provisional porque el valor de W_A está afectado por una serie de factores modificadores. En primer lugar, se ha visto que (4.14), y el correspondiente ábaco, se obtuvieron para el caso estándar $a = (1/4)l$; el primer factor modificador ajusta el valor de W_A para tener en cuenta proporciones de luz/flecha diferentes de 4. Cuando $l/a > 4$ (es decir, para arcos muy rebajados) el factor se reduce progresivamente desde la unidad (hasta aproximadamente 0,6, por ejemplo, para $l/a = 8$).

En segundo lugar, se realiza un ajuste para permitir un perfil diferente del parabólico estándar, para el que $r_q/r_c = ¾$, donde r_q es la flecha a un cuarto de la luz, figura 4.1; para $r_q/r_c > ¾$ el factor es menor de la unidad.

Tercero, el producto de dos factores adicionales expresa una evaluación de la calidad del material en el arco y el relleno; el factor resultante del material puede ser mayor o menor que la unidad, y estará generalmente entre 0,6 y 1,2.

Cuarto, se evalúa un factor de junta de entre ½ y 1, a partir del ancho, espesor y condición del mortero entre las dovelas.

Estos cuatro factores se aplican al valor provisional de la carga axial, y pueden tener un efecto importante; cuatro factores de valor 0,7 cada uno reducirán la carga permitida a un cuarto del valor provisional. Es más, hay un quinto y último factor a aplicar: el factor de condición. El ingeniero especificará un factor de entre 0 y 1

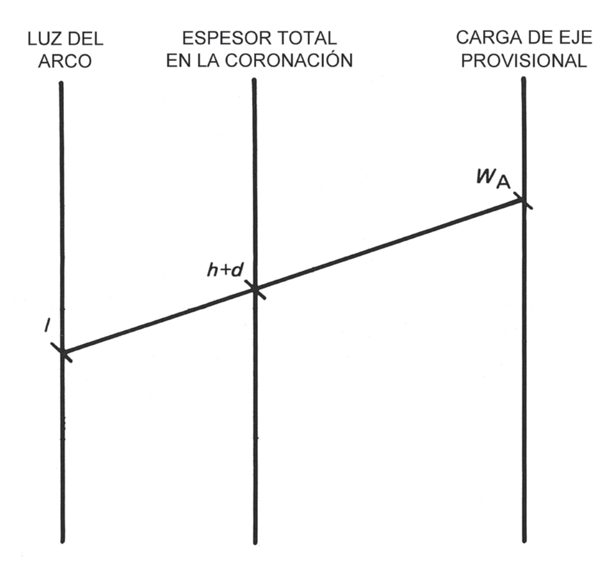


Figura 4.4

dependiendo de su impresión general sobre el estado del puente (un factor de 0,4 o menos implica que el puente debe ser rehabilitado inmediatamente).

Las características esenciales de este enfoque MEXE/MOT para la evaluación de puentes de fábrica son:

(a) Hay un énfasis considerable en las propiedades geométricas del puente; en el ábaco, la luz del arco y el espesor total en la clave ($h + d$) sirven para definir un valor provisional de la carga axial, y el estado real del arco se introduce después en forma de factores modificadores. Una curiosidad es que el espesor d del arco no entra directamente en los cálculos, aunque tiene un pequeño efecto en el valor del factor del material.

(b) El arco es considerado, igual que a finales del siglo XIX, como una estructura elástica hiperestática. Se realiza una larga serie de hipótesis simplificadoras, pero el estado del arco bajo una carga determinada se evalúa usando las técnicas elásticas establecidas.

(c) El criterio final para la capacidad de carga del arco se basa en obtener un valor límite para los valores de la tensión de compresión.

Toda la evaluación depende, por supuesto, de los valores del empuje y el momento flector que se han calculado en la clave del arco. Como se ha señalado, el valor del empuje no se verá muy afectado por las diferentes hipótesis realizadas en el análisis elástico, pero el valor del momento flector es sensible a estas hipótesis. Por eso, en vista de esta situación, esta manera de evaluar el valor provisional de la carga axial debe considerarse con cierta desconfianza.

Sin embargo, el criterio de la tensión límite de compresión impone, en la práctica, cierta uniformidad en la evaluación. El uso de la regla del tercio central como criterio restrictivo implicaría que, en la clave del arco, el 50 % de la tensión máxima a compresión se debería al empuje, y el otro 50% al momento flector; la regla de la mitad central hace esta proporción 40/60. El examen de Pippard de la expresión W_2 (4.14), en la que encontró que la regla de la mitad central se violaba ligeramente para un amplio rango de casos reales, implica que las proporciones son de 30/70 o tal vez 25/75. De manera que para este rango habitual de puentes, el empuje horizontal contribuye a una proporción aproximadamente constante de entre el 25% y el 30%, de la tensión máxima de compresión en la clave; de hecho, el cálculo del arco (es decir, la evaluación de la capacidad de carga) se basa empíricamente casi por completo en el valor del empuje.

Así, a pesar de la aparente arbitrariedad de algunos pasos, el análisis de Pippard que condujo al método MEXE/MOT quizás no es tan caprichoso como pudiera parecer. Si fuera usado como un método de proyecto, entonces las dimensiones del arco se fijarían desde el valor del empuje en el arco, de manera que las tensiones se mantendrían, nominalmente, dentro de los valores permitidos, y esto a pesar del hecho de que, paradójicamente, el espesor del arco no es un parámetro principal en el método. Como con la mayoría de conjuntos de reglas de proyecto aparentemente empíricas, está implícito que la estructura considerada es de un tipo habitual. Ciertamente, parece implícito que un arco con una forma razonable para un puente con un relleno razonable en la clave será capaz de soportar un rango razonable de sobrecargas (el estado real tiene algún efecto en el proyecto, mediante varios factores introducidos en el análisis).

Además, el método MEXE/MOT deja lugar para el criterio del ingeniero en cuanto a la naturaleza de los materiales y el estado de la estructura. Sin embargo, el método es, en último análisis, una amalgama de experiencia práctica respaldada por una teoría del comportamiento elástico que no se aplica realmente a la estruc-

tura de fábrica, y que en realidad se desecha en su mayor parte para la elaboración de un método práctico de evaluación.

Sobre todo, no se tienen en cuenta los conocimientos, muy reales, adquiridos en los siglos XVIII y principios del XIX; son estos conocimientos sobre el comportamiento del arco de dovelas, profundizados ahora y asegurados por los teoremas plásticos básicos, los que permiten proponer un método alternativo de cálculo.

Un método «plástico» de análisis

La idea de un coeficiente geométrico de seguridad discutida en el capítulo 2 se puede desarrollar para obtener una manera alternativa de evaluar la seguridad de un arco. Se vio que había configuraciones límite para el estado de cualquier arco dado. Por ejemplo, el arco idealizado semicircular soportando su propio peso tiene sólo los dos límites de las figuras 4.5 (a) y (b); en el primero, el empuje en el apoyo tiene el menor valor posible $H_{mín}$, y en el segundo el empuje ha aumentado al mayor valor posible $H_{máx}$. Ni la teoría «elástica» ni la teoría «plástica» indican cuál de

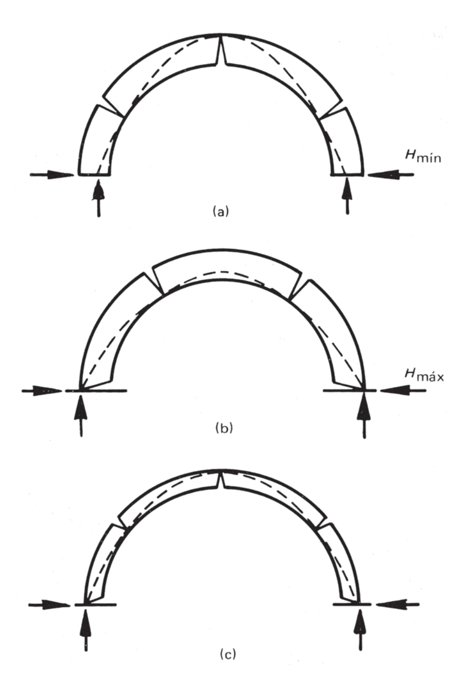


Figura 4.5

estos dos estados es «correcto»; el estado real del arco en un momento dado dependerá del estado actual del entorno (es decir, de si los apoyos han cedido ligeramente, o asentado diferencialmente, o se han aproximado uno a otro).

Lo que sí puede decirse, sin embargo, es que los valores de $H_{mín}$ y $H_{máx}$ señalados en la figura 4.5 serán bastante parecidos; estos valores se pueden determinar analíticamente (para este ejemplo idealizado) o, de una manera más general, dibujando polígonos funiculares mediante los métodos del capítulo 1. Si el espesor del arco se reduce ligeramente los valores de $H_{mín}$ y $H_{máx}$ se acercarán más y, como se vio, hay un límite, figura 4.5(c), cf. figura 2.9, en el que el arco se ha reducido hasta tal punto, que la posición de la línea de empujes y el correspondiente valor de H son únicos. Como se señaló en el capítulo 2, la proporción entre el espesor del arco en la figura 4.5(a) ó (b) y el de la figura 4.5(c) puede definirse como el coeficiente geométrico de seguridad.

La figura 4.6 (a) muestra el puente de la figura 4.1 con una carga puntual en una posición genérica. Se puede dibujar el polígono funicular que equilibra el peso propio del arco y su relleno, junto con la carga puntual P, y se supondrá que la línea de empujes queda dentro del arco. El arco puede entonces reducirse al estado de la figura 4.6(b), que contiene justo la línea de empujes. Durante este proceso el polo del polígono de fuerzas se puede haber desplazado (si el problema se aborda gráficamente), y estará finalmente forzado a situarse en una posición única. Esto se debe, como se ha visto, a que solamente se puede dibujar un polígono funicular que pase por tres puntos dados; la formación final de *cuatro* articulaciones de la figura 4.6(c), que corresponde con la línea de empujes de la figura 4.6(b), fija esa línea de empujes y da además otra información, en concreto el espesor mínimo del arco. El problema puede en realidad resolverse escribiendo una serie de ecuaciones simultáneas, como se verá en el capítulo 5; independientemente del método usado, se podrá calcular un coeficiente geométrico de seguridad comparando los arcos de las figuras 4.6(a) y (b).

Ahora puede repetirse todo el análisis para una posición diferente de la sobrecarga P y calcular un nuevo valor del coeficiente geométrico. En el capítulo 5 se hace una investigación numérica de este tipo; la figura 4.7 muestra los resultados esenciales obtenidos a partir del análisis del paso de una sobrecarga dada P sobre un puente. La forma precisa de la curva de la figura 4.7 dependerá de la geometría concreta del puente y de la proporción entre la sobrecarga y el peso propio,

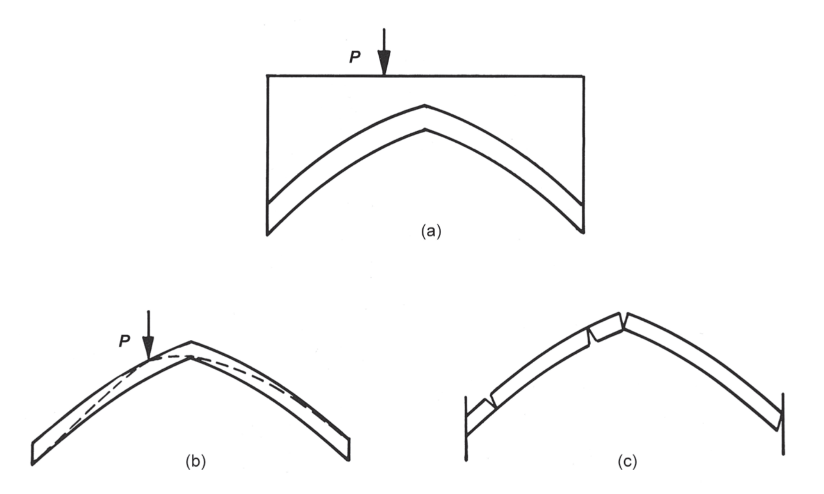


Figura 4.6

pero el aspecto general será como el representado. En particular, el valor mínimo del coeficiente geométrico de seguridad se dará cuando la sobrecarga se sitúa a alrededor de un cuarto de la luz, y este valor mínimo es razonablemente «fijo»; por lo tanto, hay razones para suponer que, con el fin de desarrollar un método de análisis rápido y aproximado, la peor posición de la sobrecarga se encuentra exactamente en el cuarto de luz. Es más, se supondrá que el mecanismo de colapso del arco de espesor mínimo será el indicado por la posición de la línea de empujes de la figura 4.8, en un amplio rango de diferentes formas de arco (cf. figura 4.6).

La figura 4.9 muestra las dimensiones del arco. La rosca del arco no tiene necesariamente un espesor uniforme, y se muestra en su configuración mínima con todos los espesores «reducidos» que mantienen la misma proporción que los valores reales correspondientes en cada sección del vano. La superficie de la calzada es horizontal. Se supone que el relleno no tiene resistencia y que transmite la sobrecarga P a la rosca del arco sin dispersarse; tanto el relleno como la rosca del arco tienen un peso específico γ. Los cálculos están normalizados con respecto a la flecha h_c del arco, de manera que el parámetro $\alpha = h_q/h_c$ da una idea de la forma del arco, el parámetro $\beta = h_0/h_c$ da una idea del espesor del puente en la clave (rosca más relleno), y $\tau = t/h_c$ es una medida del espesor vertical de la rosca del arco a un cuarto de la luz.

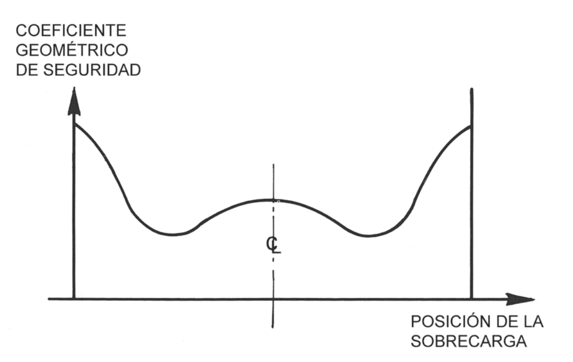


Figura 4.7

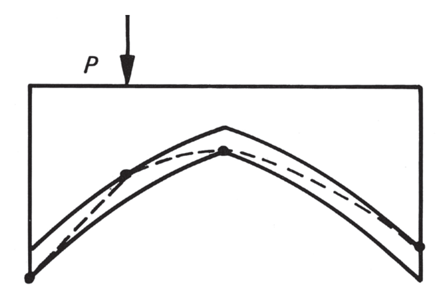


Figura 4.8

El último cuarto del puente tiene un peso propio W_1 con el centro de gravedad mostrado en la figura 4.9; se muestra igualmente W_2. Cuando el arco está punto de colapsar la posición del polígono funicular se conoce en las cuatro secciones indicadas en la figura 4.8. Como se ha discutido, estos cuatro puntos permiten fijar el polígono funicular de manera única, y también proporcionan una relación única entre las variables señaladas en la figura 4.9. Hay varias maneras de establecer esta relación, pero quizá la más fácil sea escribir las ecuaciones estáticas de equilibrio. La manera en la que esto puede hacerse se muestra numéricamente en el capítulo 5; para las variables señaladas en la figura 4.9, con el mecanismo de colapso de la figura 4.8, la relación requerida es

$$P = 16\frac{W_2 x_2\{\alpha + \left(1 - \frac{1}{4}k\right)\tau\} - \left(W_1 x_1 + \frac{1}{4}W_2\right)\{(1-\alpha) - \left(1 + \frac{1}{4}k\right)\tau\}}{(3-2\alpha) - (2+k)\tau} \quad . \qquad (4.16)$$

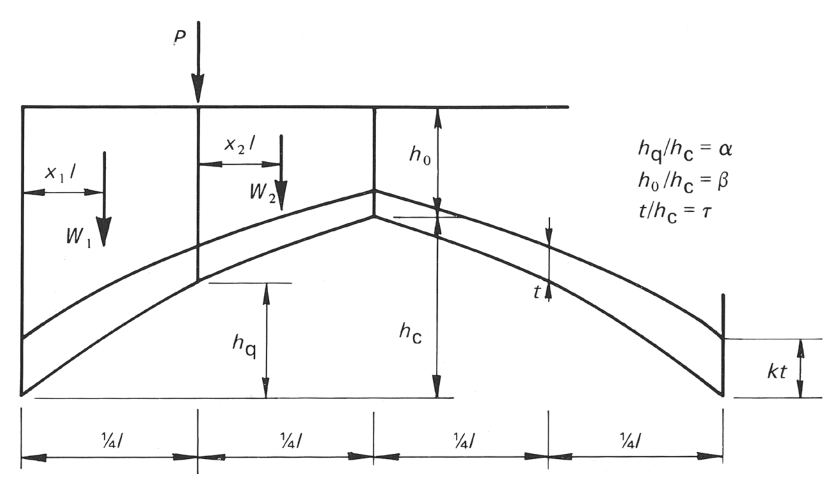


Figura 4.9

La ecuación (4.16) da el valor de la sobrecarga *P* que justo provocaría el colapso del arco. Cuando $(3–2\alpha)=(2 + k)\tau$, la carga de colapso es teóricamente infinita. Esto se corresponde con un arco de las proporciones mostradas en la figura 4.10, en el que se pueden dibujar dos líneas rectas desde el trasdós a un cuarto del vano hasta los arranques (cf. figura 2.l0(a)).

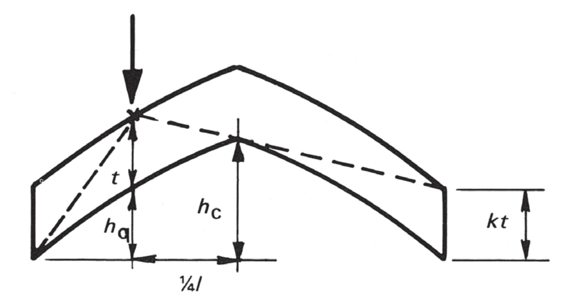


Figura 4.10

Como una aproximación más, realizada para obtener (4.16) en una forma más apropiada para su aplicación general, el peso W_1 (y el correspondiente valor de x_1 que define el centro de gravedad, figura 4.9) se ha calculado a partir del trapecio de la figura 4.11; el intradós de la rosca del arco se ha remplazado por una línea recta.

Con una aproximación similar para W_2 y para una unidad de ancho del puente, (4.16) se convierte en

$$p = \frac{P}{\frac{1}{6}\gamma l h_c} = \frac{(1+3\beta-\alpha)\{\alpha+\left(1-\frac{1}{4}k\right)\tau\} - (6+9\beta-5\alpha)\{(1-\alpha)-\left(1+\frac{1}{4}k\right)\tau\}}{(3-2\alpha)-(2+k)\tau} \tag{4.17}$$

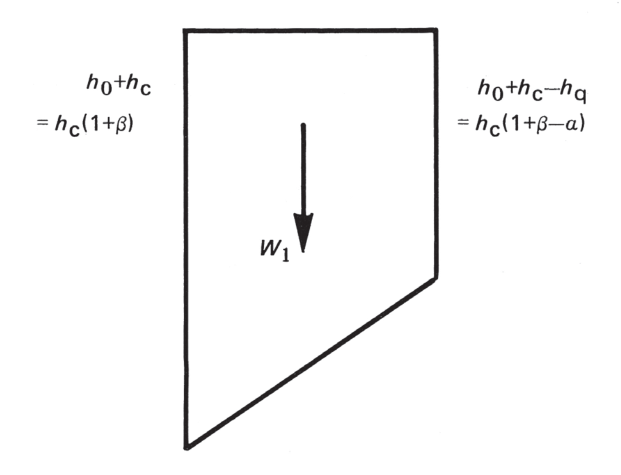


Figura 4.11

Finalmente, para reducir a uno el número de parámetros de la ecuación, la constante k que expresa el espesor vertical de la rosca del arco en los apoyos, figura 4.9, será considerada la unidad. De esta manera (4.17) da el valor de la sobrecarga necesaria para provocar el colapso del puente, en función de sólo tres parámetros, α, β y τ. La aproximación k =1 es, como corolario del teorema del límite inferior, segura, pero no en exceso. La figura 4.8 muestra que la posición de tres de las cuatro articulaciones se fija independientemente del valor de k, y la variación del espesor del arco en la cuarta articulación (en el apoyo) tiene un efecto pequeño en el valor de P. Este argumento físico se refuerza examinando las magnitudes relativas de las variables en (4.17); la magnitud adimensional del espesor de la rosca τ, con la que está siempre asociada k, es generalmente pequeña comparada con los valores de α y β.

La ecuación (4.17) es la base para un método rápido de evaluación de arcos de fábrica. La tabla 4.1 da valores numéricos (para *k*=1) de

$$\tau = 0.04\ (0.02)0.30$$
$$\alpha = 0.60, 0.65, 0.68\ (0.02)0.82, 0.85, 0.90$$
$$\beta = 0{,}1. \qquad (4.18)$$

El valor de P es una función lineal de β, de manera que una interpolación lineal para un valor dado de β es exacto. Con la relativamente aproximada tabulación, no se introducen grandes errores en la interpolación lineal de α y τ. En el capítulo 5 se dan ejemplos de uso de la tabla 4.1.

El análisis preciso de un puente en arco real puede hacerse tras una evaluación rápida preliminar con la tabla. Si el peor caso de sobrecarga es, en efecto, el de una única sobrecarga, el método aproximado dará generalmente un resultado cercano al valor exacto; el valor real puede comprobarse mediante el dibujo de los polígonos funiculares, y de nuevo se dan ejemplos en el capítulo 5. Sin embargo, si la carga de proyecto especificada consiste en un tren de cargas, entonces debe utilizarse desde el principio un método gráfico.

En cualquier caso, tanto la solución aproximada como el análisis exacto proporcionarán, para un puente determinado, una estimación de su coeficiente geométrico de seguridad. La elección de un valor adecuado para ese factor sigue siendo una cuestión abierta. El problema recuerda a la situación en los inicios del desarrollo de la teoría plástica aplicada a los pórticos de acero; entonces, se estableció un valor adecuado del factor de carga (alrededor de 1,75) mediante la comparación de los cálculos plásticos con los cálculos elásticos convencionales. El método de Pippard ofrece alguna ayuda en este sentido, pero lo que se necesita es un estudio exhaustivo de los puentes existentes. Mientras tanto, una experiencia más limitada indica que un factor geométrico de 2 podría ser apropiado, y este factor se ha utilizado de hecho en la rehabilitación de algunos arcos de fábrica.

A partir de las observaciones hechas en el capítulo 2, puede apreciarse que la adopción de un factor geométrico de 2 equivale al uso de la regla de la mitad central. Si se hiciera un cálculo puramente gráfico, entonces la rosca del arco se representaría en la mesa de dibujo como un arco reducido a la mitad de su grosor real.

Tabla 4.1 Valores de p (la interpolación lineal de β es exacta)

τ	$\alpha = 0.60$		$\alpha = 0.65$		$\alpha = 0.68$		$\alpha = 0.70$		$\alpha = 0.72$		$\alpha = 0.74$	
	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 0$	$\beta = 1$
0.04									–0.24	–0.11	–0.20	0.10
0.06							–0.24	–0.09	–0.20	0.12	–0.17	0.35
0.08					–0.24	–0.07	–0.20	0.15	–0.16	0.38	–0.13	0.62
0.10			–0.26	–0.15	–0.20	0.18	–0.16	0.42	–0.12	0.67	–0.08	0.93
0.12			–0.22	0.10	–0.15	0.46	–0.11	0.71	–0.07	0.98	–0.03	1.26
0.14			–0.17	0.37	–0.10	0.76	–0.06	1.03	–0.02	1.32	0.02	1.63
0.16	–0.24	0.04	–0.12	0.67	–0.05	1.09	0.00	1.39	0.04	1.71	0.08	2.04
0.18	–0.18	0.32	–0.06	1.00	0.01	1.46	0.06	1.79	0.11	2.13	0.15	2.51
0.20	–0.13	0.62	0.00	1.37	0.08	1.87	0.13	2.23	0.18	2.62	0.23	3.03
0.22	–0.06	0.97	0.08	1.78	0.16	2.33	0.21	2.73	0.26	3.16	0.31	3.63
0.24	0.01	1.34	0.16	2.24	0.24	2.85	0.30	3.30	0.36	3.79	0.41	4.31
0.26	0.09	1.77	0.25	2.76	0.34	3.45	0.40	3.95	0.47	4.51	0.53	5.11
0.28	0.18	2.24	0.35	3.35	0.45	4.13	0.52	4.71	0.59	5.34	0.67	6.05
0.30	0.28	2.78	0.47	4.03	0.58	4.92	0.66	5.59	0.75	6.34	0.83	7.15

Tabla 4.1 – *(continuación)*

τ	$\alpha = 0.76$		$\alpha = 0.78$		$\alpha = 0.80$		$\alpha = 0.82$		$\alpha = 0.85$		$\alpha = 0.90$	
	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 0$	$\beta = 1$
0.04	–0.17	0.32	–0.14	0.55	–0.10	0.79	–0.08	1.04	–0.04	1.44	0.02	2.18
0.06	–0.13	0.58	–0.10	0.83	–0.07	1.09	–0.04	1.36	0.00	1.80	0.06	2.61
0.08	–0.09	0.88	–0.06	1.14	–0.02	1.42	0.01	1.72	0.05	2.20	0.10	3.10
0.10	–0.04	1.20	–0.01	1.49	0.02	1.80	0.05	2.12	0.09	2.64	0.15	3.65
0.12	0.01	1.56	0.04	1.87	0.07	2.21	0.11	2.57	0.15	3.15	0.21	4.28
0.14	0.06	1.96	0.10	2.30	0.13	2.67	0.17	3.07	0.21	3.72	0.27	5.00
0.16	0.12	2.40	0.16	2.79	0.20	3.20	0.24	3.64	0.28	4.38	0.35	5.85
0.18	0.19	2.91	0.24	3.34	0.28	3.80	0.31	4.30	0.37	5.14	0.44	6.85
0.20	0.27	3.48	0.32	3.96	0.36	4.49	0.40	5.06	0.46	6.04	0.55	8.05
0.22	0.36	4.13	0.41	4.68	0.46	5.29	0.51	5.95	0.58	7.10	0.68	9.52
0.24	0.47	4.89	0.53	5.53	0.58	6.23	0.64	7.01	0.72	8.37	0.85	11.35
0.26	0.59	5.78	0.66	6.52	0.72	7.35	0.79	8.29	0.89	9.95	1.06	13.71
0.28	0.74	6.84	0.82	7.72	0.90	8.72	0.98	9.86	1.11	11.93	1.35	16.85
0.30	0.92	8.11	1.01	9.18	1.11	10.41	1.21	11.84	1.39	14.51	1.75	21.25

Ejemplo. Para $l = 7{,}20$ m, $h_c = 2{,}66$ m, $h_q = 2{,}08$ m, $h_0 = 1{,}00$ m, $t = 320$ mm, $\gamma = 1{,}67$ t/m^3, $\alpha = 0{,}78$, $\beta = 0{,}376$, $\tau = 0{,}12$, $\gamma l h_c/6 = 5{,}33$ t/m: a partir de la Tabla, $p = 0{,}73$ y por tanto, $P = 3{,}9$ t/m.

5
Ejemplos prácticos

La línea de empujes

Algunos ejemplos del análisis y proyecto de puentes reales ilustrarán las ideas desarrolladas en los capítulos anteriores. Aunque el método rápido de evaluación ofrecido en el capítulo 4 puede ser útil en un análisis preliminar, es evidente que los cálculos finales implicarán la construcción, en la mesa de dibujo o analíticamente, de polígonos funiculares. En el capítulo 1 se ha mostrado que un polígono funicular se puede dibujar por medios puramente gráficos, pero se puede ahorrar trabajo con algunos cálculos preliminares.

Es conveniente referir los cálculos a un origen en el arranque del arco (cf. figura l.13(a)). En la figura 5.1 la línea continua OA representa el intradós (o la línea media, o cualquier otra línea de referencia) del arco, y la línea discontinua representa la línea de empujes, que pasa a una distancia vertical Δ sobre el origen. En cualquier sección A del arco, la distancia vertical entre la línea de referencia OA del arco y la línea de empujes es ϵ_A. La carga vertical (no uniforme) que actúa sobre el arco tiene un valor w por unidad de longitud horizontal; así, el equilibrio estático (tomando momentos en el extremo derecho de la línea de empujes) requiere que

$$(y_A + \epsilon_A - \Delta)H + \int_0^{x_A}(x_A - z)w\,dz = Vx_A \ , \tag{5.1}$$

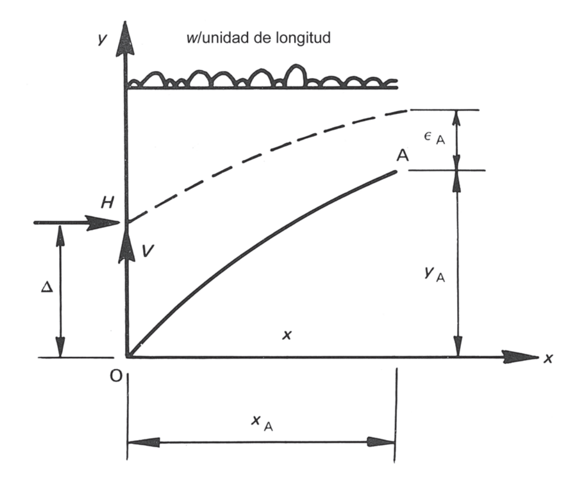


Figura 5.1

es decir

$$\epsilon_{\mathrm{A}} = \Delta - y_{\mathrm{A}} + \frac{V}{H} x_{\mathrm{A}} - \frac{1}{H} \int_0^{x_{\mathrm{A}}} (x_{\mathrm{A}} - z) w dz \quad . \tag{5.2}$$

En esta ecuación, V y H son las componentes del empuje en el apoyo, como se indica en la figura 5.1. Si aún no se han determinado sus valores, las tres cantidades Δ, V/H (=μ) y $1/H$ (=v) en (5 .2) pueden considerarse como las tres cantidades redundantes o hiperestáticas del arco, y puede escribirse (5.2) para cualquier sección x (eliminando el subíndice A):

$$\epsilon = \Delta - y + \mu x - v \int_0^{x} (x - z) w dz \quad . \tag{5.3}$$

Cuando se dibuja un polígono funicular real, las cargas aplicadas se aproximarán a una serie de cargas puntuales W_r, figura 5.2. Si la sección considerada se toma en la n-ésima carga W_n, entonces la integral en (5.3) se sustituye por la expresión

$$x_n \sum_{r=1}^{n} W_r - \sum_{r=1}^{n} x_r W_r \quad . \tag{5.4}$$

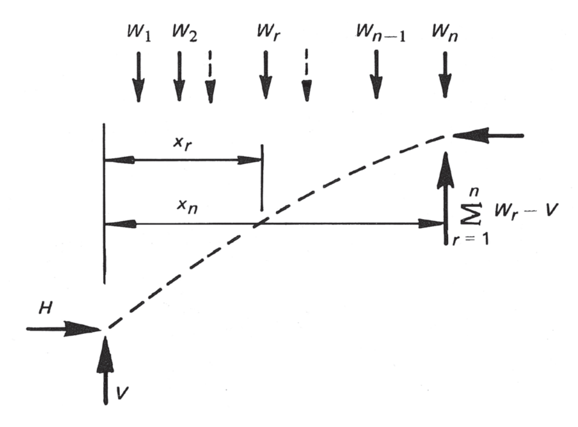


Figura 5.2

Esta expresión puede evaluarse (en forma de tabla) para una carga determinada; en la tabla 5.2, más adelante, se da un ejemplo. La ecuación (5.3) da la posición de la línea de empujes en relación con la línea media del arco. Si se conoce la posición en tres secciones cualesquiera, se pueden determinar las incógnitas Δ, μ y v, y se puede calcular la posición en cualquier otra sección (véase la tabla 5.3 más abajo). Un primer ejemplo ilustrará cómo pueden escribirse y resolverse las ecuaciones.

El puente de Teston, Kent

El puente de Teston, figuras 5.3 y 5.4 data del siglo XIII; fue rehabilitado en 1979 para que pudiera permitirse su uso sin restricciones. Con este fin, se especificaron cuatro hipótesis diferentes de carga, y de éstas, la más crítica resultó ser una carga por eje de 11 t; esta carga se tomará como una carga lineal a través de todo el ancho del puente (3,5 m). Considerando el impacto, la carga lineal tiene un valor de 40 kN/m.

Por supuesto, tal carga «en cuchillo» es precisamente la prevista en el desarrollo del método rápido de evaluación (figura 4.8, que conduce a la tabla 4.1). Las dimensiones básicas del arco de referencia en Teston están señaladas en la figura 5.5; son $l = 7200$, $h_c = 2660$, $h_q = 2080$ y $h_0 = 1000$ mm. De estos valores,

$$\alpha = h_q/h_c = 0{,}78 \quad , \qquad \beta = h_0/h_c = 0{,}376 \quad . \tag{5.5}$$



Figura 5.3 Puente de Teston, Kent, siglo XIII y posterior. Los tirantes sujetando los muros de los tímpanos sobre el cañón se eliminaron en la rehabilitación de 1979



Figura 5.4 Fábrica basta del puente de Teston, Kent, formando una rosca de unos 200-400 mm

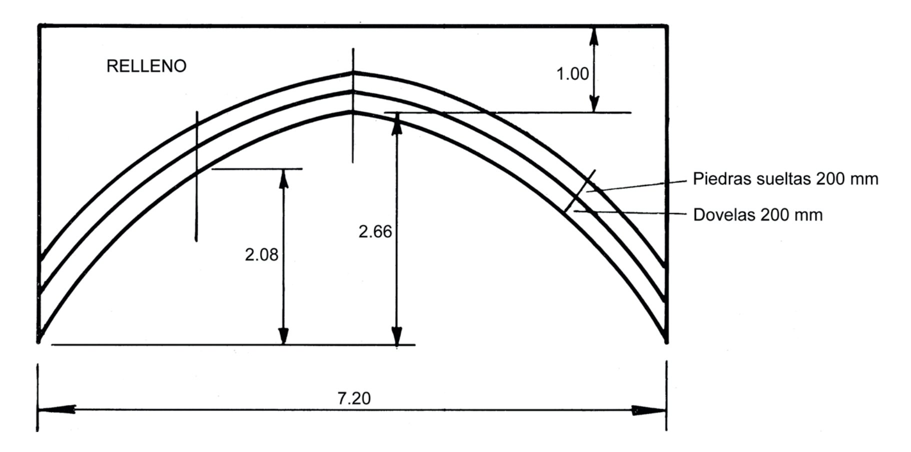


Figura 5.5

Se ha tomado un peso específico del material (arco y relleno) de 16,7 kN/m^3, de manera que $(1/6)\gamma l h_c$ =53,3 kN/m; la carga puntual adimensional tiene un valor p = 40/53,3 = 0,75. La tabla 4.1 da entonces el valor necesario de τ de 0,122 para que el arco sea justo estable. El espesor vertical t del arco a un cuarto de la luz debe tener un valor mínimo de 0,122×2660 = 325 mm, que corresponde a un espesor radial de unos 280 mm.

Comparando con la figura 5.5, se podría dudar sobre la capacidad del arco para soportar la carga puntual especificada; para un coeficiente geométrico de seguridad de 2, la rosca del arco debería tener unos 560 mm de espesor. El siguiente paso consiste en hacer unos cálculos más precisos para confirmar que el espesor mínimo aproximado de 280 mm es correcto.

La luz del arco (7,20 m) se ha dividido en doce partes iguales de 0,60 m, y se han calculado los pesos de cada una de las doce porciones. Las ordenadas del perfil del arco se dan en la tabla 5.1, y las cargas que actúan sobre la rosca del arco se muestran en la figura 5.6. Siguiendo los argumentos relativos a la figura 5.1, se tomarán momentos en varios puntos del arco, y la tabla 5.2 registra de forma ordenada las cargas y sus momentos correspondientes. En este caso, para simplificar las ecuaciones, los cálculos se refieren al extremo derecho del arco. Las incógnitas V y H se introducen tal y como se muestra en la figura 5.7.

La manera en la que se han hecho los cálculos y se ha usado la tabla 5.2 es la siguiente. La figura 5.7 muestra una carga puntual P situada en el punto C a un cuarto

de la luz, como en la figura 4.8, y la posición de las articulaciones corresponde también a las de la figura 4.8. (Veremos más adelante que este patrón de articulaciones es ligeramente incorrecto.) El arco de la figura 5.7 tiene el espesor *radial* mínimo *d* para evitar el colapso por la formación de articulaciones en los puntos supuestos O, C, F y O'; el segundo conjunto de números de la tabla 5.1 da el espesor *vertical* de la rosca del arco en varios puntos del arco, en función del espesor radial *d*.

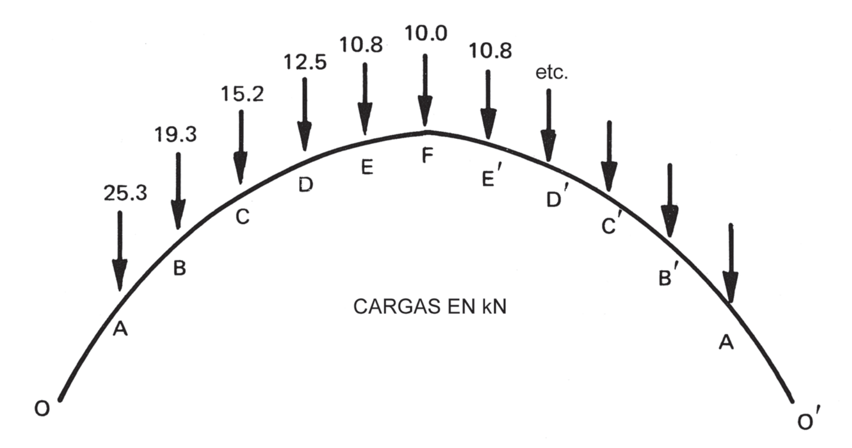


Figura 5.6

El análisis consiste simplemente en tomar momentos sucesivamente en las articulaciones F, C, y O, de las fuerzas en la parte del arco a la derecha del punto en cuestión; los datos necesarios para tomar momentos en C se han llevado de la tabla 5.1 a la figura 5.7. Las tablas 5.1 y 5.2 se pueden usar para obtener las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{En F:} & 3{,}6\,V-(2{,}66-2{,}638d)H = 171{,}06\ .\\ \text{En C:} & 5{,}4\,V-(2{,}08-1{,}161d-2{,}638d)H = 359{,}10\ .\\ \text{En O:} & 7{,}2\,V-(2{,}638d)H-1{,}8P = 634{,}32\ .\end{array}\right\} \quad (5.6)$$

Las incógnitas *V* y *H* pueden eliminarse de esas ecuaciones para dar una única relación entre el espesor preciso *d* de la rosca del arco y el valor de la carga puntual *P*:

$$d(1+0{,}00983P=(0{,}0281+0{,}00757P) \quad . \quad (5.7)$$

Punto	O	A	B	C	D	E	F
Perfil del intradós, m	0	1.03	1.65	2.08	2.37	2.56	2.66
$(1/d)$ × espesor vertical rosca	2.638	1.618	1.313	1.161	1.077	1.028	1.004

Tabla 5.1

Punto	Carga, kN	Σ carga, kN	Distancia, m	Producto, kN m	Σ producto, kN m
O′					0
		0	0.6	0	
A′	25.3				0
		25.3	0.6	15.18	
B′	19.3				15.18
		44.6	0.6	26.76	
C′	15.2				41.94
		59.8	0.6	35.88	
D′	12.5				77.82
		72.3	0.6	43.38	
E′	10.8				121.20
		83.1	0.6	49.86	
F	10.0				171.06
		93.1	0.6	55.86	
E	10.8				226.92
		103.9	0.6	62.34	
D	12.5				289.26
		116.4	0.6	69.84	
C	15.2				359.10
		131.6	0.6	78.96	
B	19.3				438.06
		150.9	0.6	90.54	
A	25.3				528.60
		176.2	0.6	105.72	
O					634.32

Tabla 5.2

Así, para $P = 40$ kN, se obtiene un d de 0,237 m (es decir, 237 mm). (Nótese que las ecuaciones deben resolverse con cuidado; involucran pequeñas diferencias en grandes números, y errores de redondeo pueden tener un efecto importante en los resultados finales.)

Los cálculos realizados hasta ahora son «inseguros» por dos razones. En primer lugar, el patrón de articulaciones de la figura 5.7 es un patrón hipotético; puede haber (y de hecho hay) una disposición más crítica de las articulaciones. En segundo lugar, la peor posición de la carga puntual puede no estar en el punto C a un cuarto de vano, sino ligeramente alejada de esta posición.

La mejor forma de confirmar la precisión del patrón de articulaciones de la figura 5.7 es dibujar la línea de empujes. No obstante, esta construcción también puede realizarse analíticamente usando (5.3) y (5.4), y tomando los términos de las cargas (5.4) de la tabla 5.2. Si (x, y) son las coordenadas del intradós del arco (los valores

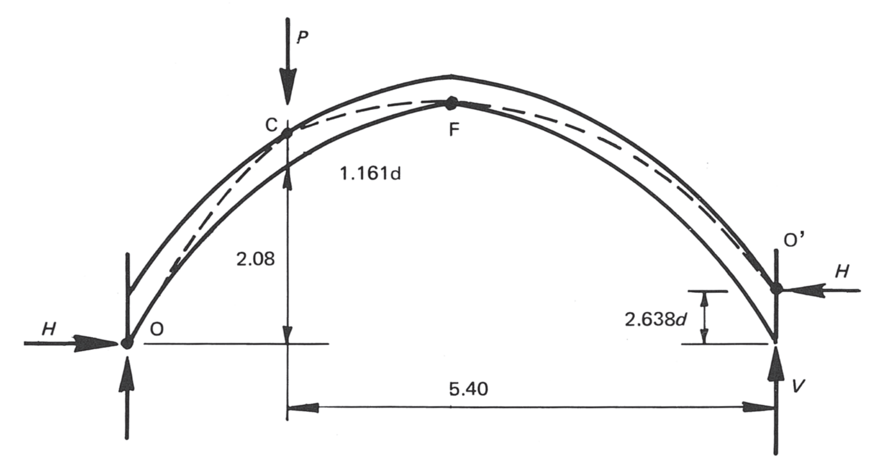


Figura 5.7

de *y* para incrementos de *x* de 0,6 se obtienen de la tabla 5.1), y si el origen se toma en O en la figura 5.7, la expresión general para la distancia vertical ϵ entre la línea de empujes y el intradós es

$$\epsilon = (2{,}638d - y) + \frac{1}{H}\left[(7{,}20 - x)V - \{1{,}80 - x\}P - \Sigma\right] \quad . \qquad (5.8)$$

En esta ecuación, las llaves {}, son llaves de «Macaulay»; el término está presente en la ecuación sólo para 1,80>*x*. El último término Σ se obtiene de la última columna de la tabla 5.2. (Las ecuaciones (5.6) son, por supuesto, casos concretos de la ecuación general (5.8), escritas en un orden ligeramente diferente.)

Los valores de *V* y *H* correspondientes a la solución de (5.7) para *P*=40 kN, son 91,3 y 77,6 kN respectivamente, y (5.8) puede resolverse para ϵ en cada sección del arco con, por supuesto, *d* igual a 237 mm. Los resultados se dan en la primera columna de la tabla 5.3, y los valores pueden compararse con la posición de la línea de empujes dibujada en la figura 5.7. En C, por ejemplo, la línea de empujes queda 276 mm por encima del intradós, y el espesor radial *d* del arco en ese punto es 276/1,161=237 mm. De manera similar, en O' el valor de *d* viene dado por 626/2,638 =237 mm, y el valor es 0 en los puntos O y F.

Punto	ϵ, mm Prueba 1 Fig. 5.7	Prueba 2 Fig. 5.8
O	0	90
A	−65	0
B	85	122
C	276	289
D	179	187
E	86	90
F	0	0
E′	36	34
D′	79	77
C′	125	126
B′	193	200
A′	303	319
O′	626	657

Tabla 5.3

Las ecuaciones se han resuelto correctamente, pero a partir de la tabla 5.3 resulta evidente que el patrón de articulaciones supuesto no es correcto. Hay un valor de ϵ negativo en el punto A, lo que implica que la línea de empujes se sale de la fábrica. El patrón de articulaciones obvio para la siguiente prueba se muestra en la figura 5.8 (cf. figura 4.6), y el análisis se puede repetir con las articulaciones en A, C, F y O'. Las ecuaciones (5.6) se sustituyen por

$$\left.\begin{array}{ll}\text{En F:} & 3{,}6\,V - (2{,}66 - 2{,}638d)H = 171{,}06\ . \\ \text{En C:} & 5{,}4\,V - (2{,}08 - 1{,}161d - 2{,}638d)H = 359{,}10\ . \\ \text{En O:} & 6{,}6\,V - (1{,}03 - 2.638d)H - 1.2P = 528{,}60\ . \end{array}\right\} \quad (5.9)$$

Las dos primeras de estas ecuaciones son idénticas a las (5.6). Para P= 40 kN, (5.9) da d=0,249 m; es decir, el espesor radial de la rosca es unos 12 mm mayor que el de la de la figura 5.7. La precisión del patrón de articulaciones puede confirmarse mediante la construcción del polígono funicular, figura 5.9 (se muestra sólo el intradós del arco); como alternativa, puede mirarse la segunda columna de la tabla 5.3, que muestra numéricamente la información de la figura 5.9.

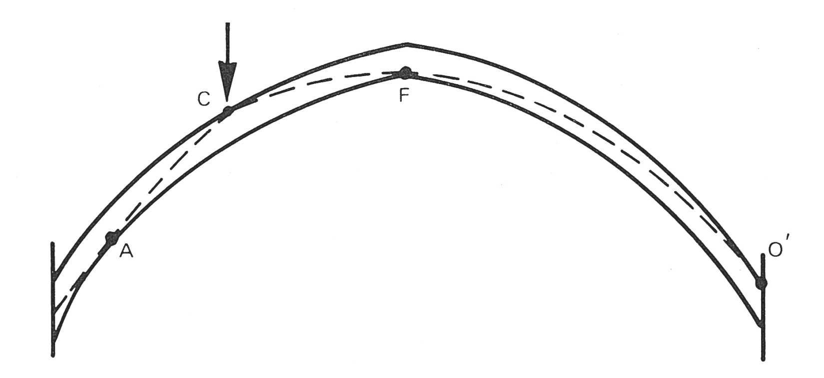


Figura 5.8

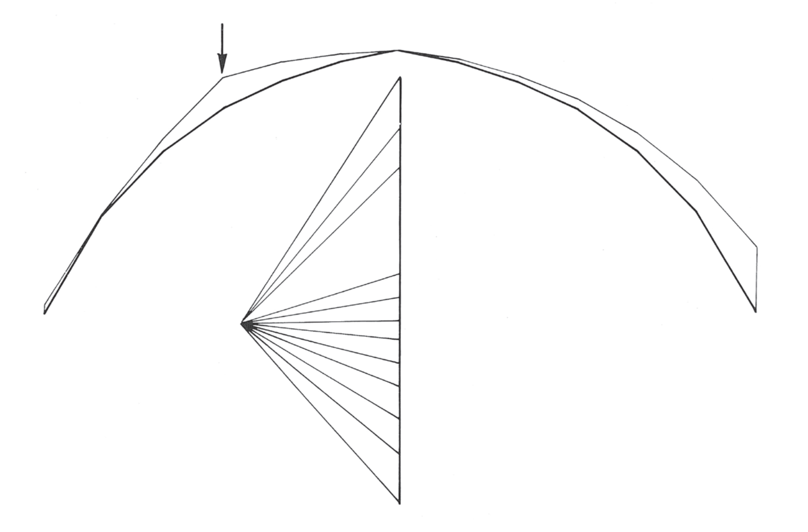


Figura 5.9

Ahora debe repetirse todo el análisis con la carga desplazada a un punto del vano que pueda ser más desfavorable. Cálculos similares realizados para las cargas situada en B y en D llevan a los espesores de la rosca del arco dadas en la tabla 5.4 (los valores se han redondeado). Para este ejemplo, la carga situada a un cuarto del

vano, en C, da el valor más crítico de profundidad de la rosca del arco, aunque el punto vecino D (que dista 0,6 m) es casi igualmente crítico.

Posición de la carga	B	C	D
Espesor rosca arco (en mm)	210	250	240

Tabla 5.4

El valor calculado rápidamente de la profundidad de la rosca del arco de 280 mm se ha reducido a 250 mm mediante un análisis más preciso. La recomendación final para la rehabilitación del puente se basó en un coeficiente geométrico de seguridad de 2; es decir, el valor mínimo requerido de 250 mm lleva a un espesor del arco real de 500 mm.

Los valores de V y H mencionados anteriormente indican que el valor del empuje (inclinado) en el estribo es de unos 150 kN/m; con una rosca del arco de 500 mm de profundidad, la tensión media correspondiente es 0,30 N/mm^2. Como es habitual en los puentes de fábrica de este tamaño, esta tensión es baja.

Como una alternativa al valor de la carga por eje de 11 t, la siguiente carga más crítica especificada para el puente correspondía a un vehículo de cuatro ejes con un peso total de 30 t y una longitud de unos 5 m. Esta carga puede estudiarse mediante la misma combinación de métodos analíticos y gráficos usada para la carga individual; en ecuaciones similares a (5.6), por ejemplo, en lugar del término 1,8P existiría una contribución de los cuatro ejes. Debido a la longitud del vehículo, 5 m, comparada con la luz de 7,2 m, esta sobrecarga está más «equilibrada» que la carga puntual; la posición más crítica de los cuatro ejes conduce a un espesor del arco de menos de 200 mm.

El método «rápido» de evaluación

Los cálculos resumidos en la última sección son típicos de arcos con luces del orden de la del puente Teston, y el método aproximado de evaluación ofrecido en la tabla 4.1 conduce a una buena estimación del espesor de la rosca del arco requerida para soportar una carga puntual dada. Como último ejemplo del uso de este método

«rápido», se presentan a continuación los datos del puente Twyford, figura 5.10, un puente cercano de cinco vanos en Kent. Este puente tiene grandes pilas y cuatro arcos sobre el río; hay un pequeño quinto arco que soporta, con un relleno en la clave poco profundo, una calzada sobre la zona inundable. Se han evaluado las dimensiones medias de cada arco mediante un levantamiento del puente; los arcos no son en realidad enteramente simétricos y la calzada tampoco es completamente horizontal. Estas dimensiones medias se muestran en la tabla 5.5, junto con los valores obtenidos para los parámetros adimensionales α y β. Se ha tomado un peso específico del material de 23 kN/m^3, con el que se ha calculado el valor de $(1/6)\gamma l h_c$ para cada vano; la sobrecarga de cálculo es P=30 kN/m, que conduce a los valores tabulados de p.

Vano	l (m)	h_c (m)	h_q (m)	h_0 (m)	α	β	$1/6\gamma l h_c$, kN/m	p	τ	t (m)	d (mm)
1	4.40	2.12	1.70	1.44	0.80	0.68	35.8	0.84	0.07	0.148	130
2	5.31	2.77	2.15	0.83	0.78	0.30	56.4	0.53	0.11	0.305	260
3	5.13	2.73	2.29	0.93	0.84	0.34	53.7	0.56	0.06	0.164	140
4	5.13	2.22	1.79	0.83	0.81	0.37	43.7	0.69	0.09	0.200	170
5	4.11	2.04	1.61	0.42	0.79	0.21	32.1	0.93	0.18	0.367	320

Tabla 5.5

	Valores de p para $\beta = 0.21$		
	$\alpha = 0.78$	$\alpha = 0.80$	$\alpha = 0.79$
$\tau = 0.16$	0.71	0.83	0.77
$\tau = 0.18$	0.89	1.02	0.96
$\tau = 0.20$	1.08	1.23	1.16

Tabla 5.6

El arco de inundación número 5 es el más crítico, principalmente por el fino relleno. El cálculo de este arco (es decir, la determinación del valor de τ) debe llevarse a cabo de manera que el valor requerido de p, 0,93, se alcance para α = 0,79, β = 0,21. La tabla 4.1 da valores de p (para β = 0, 1) para α = 0,78 y α = 0,80, y puede elaborarse la tabla 5.6 para β = 0,21. La interpolación lineal entre α = 0,78 y α = 0,80 da la columna final de valores para α = 0,79. Se verá que, para dos cifras decimales significativas, el valor adimensional apropiado de la rosca del arco para p = 0,93 es τ = 0,18, y este es el valor introducido en la tabla 5.5. La penúltima



Figura 5.10 Puente Twyford, Kent, con el río con gran caudal

columna de esta tabla da el espesor vertical t a un cuarto del arco; la rosca del arco es alrededor de un 15% menor en su dimensión radial, y la columna final muestra estos espesores para la rosca del arco en cada vano.

Si se especificara un coeficiente geométrico de seguridad de 2, entonces, la recomendación sería recrecer los arcos de los primeros cuatro vanos hasta, digamos, 250 mm, 550 mm, 300 mm y 350 mm respectivamente. En el caso del arco de inundación número 5 se necesita aparentemente un espesor radial constante de algo más de 600 mm, mientras que el valor de h_0, que incluye tanto la rosca del arco como el recubrimiento en la coronación, es de sólo 420 mm. El análisis indica, correctamente, que la carga permanente añadida al arco aumentaría su resistencia frente a la sobrecarga.

Sin embargo, como se ve en la figura 5.8, la importancia del espesor de la rosca del arco en la clave es secundaria; son los espesores del arco en los puntos situados a los cuartos de la luz y en los arranques los que controlarán su resistencia cuando se aplica una sobrecarga a un cuarto de la luz. En el caso del arco número 5 un primer tanteo da un espesor en la clave de 420 mm, pero la rosca del arco podría incrementarse a digamos 600 mm en los puntos a un cuarto de la luz y más aún hacia los arranques. El arco resultante de espesor no uniforme tendría que ser estu-

diado entonces para diferentes posiciones de la carga, ya que es posible que los puntos a un cuarto del vano no sean los más críticos.

La línea de empujes de las cargas permanentes

La investigación sobre el efecto de la sobrecarga en un arco (por ejemplo, la carga de eje o en cuchillo considerada en los ejemplos anteriores) puede hacerse a menudo más fácilmente si los cálculos se refieren a la línea de empujes de la carga permanente (en vez de a la línea media del arco real, o al intradós). Para ilustrar la manera en que se pueden hacer estos cálculos, se ha supuesto que el arco de la figura 5.11(a) está sometido a las dos cargas *permanentes* idealizadas *W*; no hay más cargas permanentes. La línea de empujes de la carga permanente consiste en las tres líneas rectas mostradas en la figura 5.11(a) y, con la idea habitual de un encogimiento imaginario del arco real, se puede determinar el coeficiente geométrico de seguridad correspondiente.

Ahora se considerará el efecto de una sobrecarga puntual P, y para este propósito, se abandonará por el momento el arco real y los cálculos se referirán al arco de la figura 5.11(b). Así, en la figura 5.11(c) se muestra la carga puntual actuando en una posición determinada (definida por el parámetro x) en el «arco de la carga permanente». La línea de empujes para la carga se muestra también en la figura 5.11(c), y se ha dibujado en una posición especial y única; su máxima desviación (vertical) de la línea media del arco es e (cuyo valor está por determinar). Un arco con la forma de la figura 5.11(b) y un espesor vertical $2e$ podría contener justo la línea de empujes de la figura 5.11(c), es más, este es el arco más fino que podría contener la línea de empujes. Si este arco de espesor $2e$ se sitúa en la figura 5.11(a), puede calcularse de inmediato el nuevo coeficiente geométrico de seguridad del arco real teniendo en cuenta la sobrecarga P.

El motivo de referir los cálculos a la línea de empujes de la carga permanente será evidente al determinar el valor de e en la figura 5.11(c). Si se toman momentos (de la manera que condujo a (5.6)) en los puntos de la línea de empujes correspondiente a las secciones del arco C, X y A, pueden escribirse las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{En C:} & Vl & = H(h-2e)\ . \\ \text{En X:} & Vl\ (2-x) - Wl(1-x) & = Hh\ . \\ \text{En A:} & 3Vl - 3Wl - Pl(1+x) & = H(-2e)\ . \end{array}\right\} \quad (5.10)$$

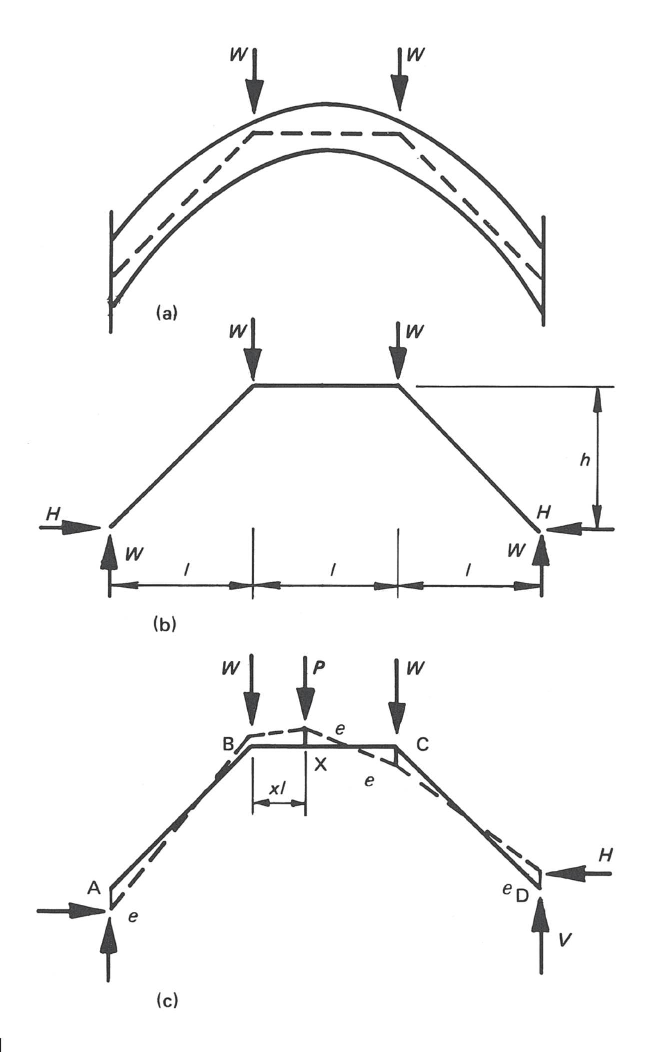


Figura 5.11

Como antes, V y H pueden eliminarse de estas ecuaciones, y el valor de e se puede expresar en función de W, P y x:

$$e = \frac{1}{2} Ph \frac{(1-x^2)}{W(4-x) + P(2-x)(1+x)} \tag{5.11}$$

Sin embargo, si se eliminan V y W de (5.10), el valor de e viene dado por

$$e = \frac{1}{H}\frac{Pl}{2}\left\{\frac{1-x^2}{4-x}\right\} \quad , \tag{5.12}$$

de donde se deduce el valor de H

$$H = \frac{Wl}{h - 2e\left(\frac{2-x}{1-x}\right)} \tag{5.13}$$

La ecuación (5.13) muestra que, si e es pequeño comparado con h, el valor del empuje en el apoyo H es cercano al valor del empuje para el peso propio Wl/h; en efecto, una sobrecarga relativamente pequeña P no alterará demasiado el empuje en el apoyo. Si puede suponerse que H es un valor fijo, (5.12) muestra que la excentricidad de la línea de empujes de la sobrecarga respecto a la línea de empujes del peso propio depende sólo de la sobrecarga P; las cargas W no aparecen explícitamente en (5.12), pero están implícitas en el valor de H. Más concretamente, el producto He, que da el «momento flector» en el arco referido a la línea de empujes del peso propio, es sólo función de la sobrecarga.

Este asunto se evidencia de inmediato si se estudia el problema del pórtico análogo, figura 5.12. Si el pórtico fuera calculado mediante la teoría plástica, el mecanismo apropiado de colapso involucraría las cuatro articulaciones en A, X, C y D; es más, como en la figura 5.11 se han establecido valores iguales de e, los valores de M_p de los momentos plásticos completos correspondientes en la figura 5.12 serán los mismos en las cuatro articulaciones. (Para un arco de espesor variable, con diferentes valores de excentricidad, como por ejemplo en la figura 5.7, los valores de M_p serán diferentes en cada articulación. Se da un ejemplo más abajo, figura 5.19.)

El movimiento del mecanismo de la figura 5.12 puede referirse a la rotación θ de la parte XC del arco alrededor del centro instantáneo I. Un análisis directo de la geometría del movimiento lleva a las rotaciones $\emptyset$ y ψ indicadas en la figura 5.12 dadas por

$$\emptyset = \psi = \left(\frac{1-x}{2+x}\right)\theta \quad . \tag{5.14}$$

Así, el trabajo realizado por la carga en un pequeño movimiento del mecanismo es

$$P(1+x)l\emptyset + Wl\emptyset - Wl\psi \quad ,$$

y, debido a (5.14), los términos en W se cancelan.

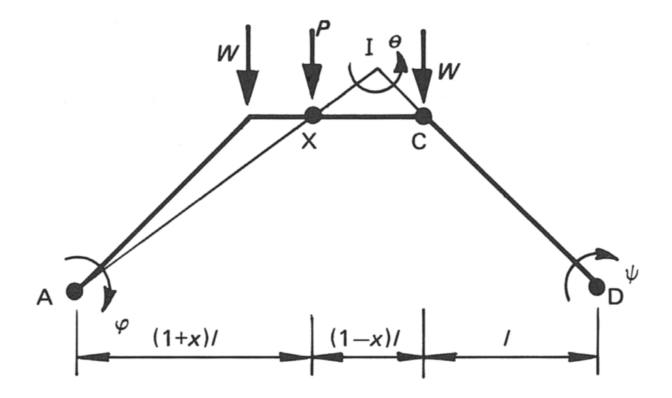


Figura 5.12

Esto es, por supuesto, un ejemplo particular de una propiedad general. Como la línea media del arco considerada coincide con la línea de empujes del peso propio, cualquier pequeña deformación sin variación de longitud de la línea media llevará a un trabajo virtual cero de esas cargas permanentes. De esta manera, cualquier mecanismo del tipo representado en la figura 5.12, referido a la línea de empujes del peso propio, sólo implicará términos de trabajo para la sobrecarga adicional.

La rotación total de las articulaciones en la figura 5.12 es $2(\theta + \emptyset + \psi)$, de manera que, usando (5.14) e igualando el trabajo realizado por las cargas al trabajo disipado por las articulaciones, se obtiene que

$$M_{\mathrm{p}} = \frac{Pl}{2}\left(\frac{1-x^2}{4-x}\right) \quad . \tag{5.15}$$

Así, volvemos a obtener la ecuación (5.12) en este análisis del pórtico análogo. La ecuación (5.15) es exacta porque se ha supuesto que las articulaciones plásticas se encuentran en la línea media del arco análogo. Las articulaciones reales entre las dovelas se producirán ligeramente fuera de la línea media (de hecho, en las excentricidades e de la figura 5.11), y el mecanismo de colapso real dará lugar a un pequeño aumento de longitud de la línea media.

El valor máximo de M_p en (5.15), es decir, de He en (5.12), se da para $x = 4 - \sqrt{15} = 0{,}127$ y es igual a

$$M_p = He = Pl(4 - \sqrt{15}) = 0{,}127Pl. \tag{5.16}$$

Si e es en realidad pequeño comparado con h, de manera que H puede aproximarse al valor producido por la carga del peso propio de Wl/h, de (5.13), entonces

$$e = 0{,}127\frac{P}{W}h \quad . \tag{5.17}$$

(Para el puente de Teston, considerado anteriormente en este capítulo, el valor apropiado de W podría ser la mitad del peso propio del arco, es decir, 88,1 kN de la figura 5.6 o de la tabla 5.2, mientras que P era 40 kN. Así 0,127 P/W tiene un valor en este caso de 0,06).

El problema de las figuras 5.11 y 5.12 se ha resuelto analíticamente, pero es más conveniente usar métodos gráficos para arcos de geometría compleja. Si se usan métodos gráficos, las cargas permanentes pueden ignorarse completamente al analizar el efecto de la sobrecarga. En el problema recién considerado, para calcular el valor de M_p en las articulaciones de la figura 5.12, es suficiente considerar la acción de la carga puntual P actuando sola. En la figura 5.13(a) la línea de empujes se ha situado para obtener cuatro valores iguales del momento flector, igual que anteriormente. En realidad, esto se habría hecho muy rápidamente mediante prueba y error; de la geometría simple de la figura 5.13(a); se obtiene que

$$\frac{2e'}{h} = \frac{1-x}{2-x} \tag{5.18}$$

La línea de empujes se muestra separadamente, y en una posición general, en la figura 5.13(b); consideraciones estáticas llevan a la expresión

$$T = \frac{P}{\frac{h_1}{l_1} + \frac{h_2}{l_2}} \quad . \tag{5.19}$$

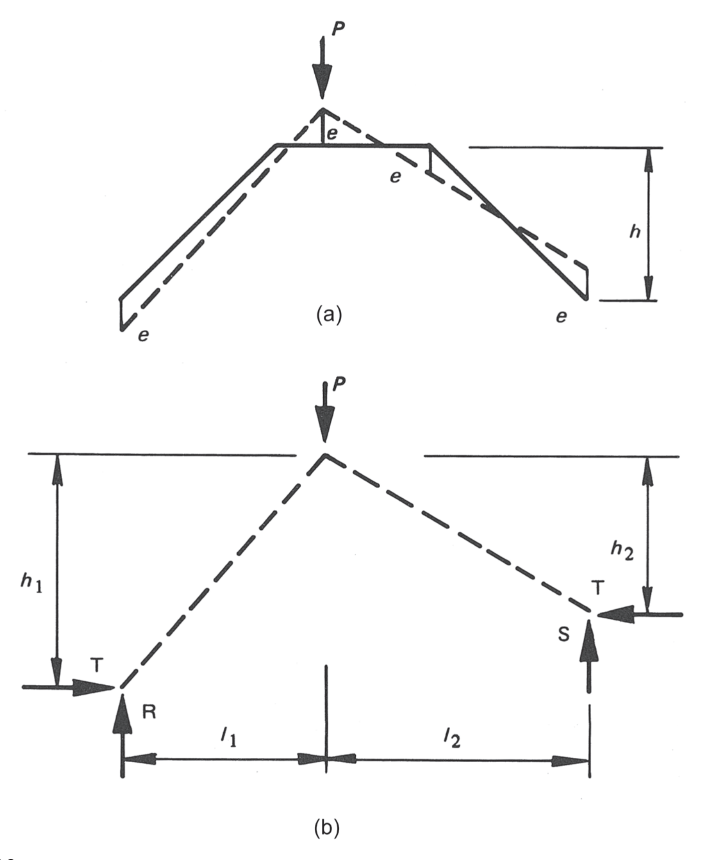


Figura 5.13

Así que para $h_1 = h + 2e'$, $h_2 = h$, $l_1 = (1 + x)l$, $l_2 = (2 - x)l$, el valor de T es

$$T = \frac{Pl}{h} \frac{(1+x)(2-x)}{(4-x)} \quad , \tag{5.20}$$

de manera que, usando (5.18) y (5.19),

$$Te' = \frac{Pl}{2} \frac{(1-x^2)}{4-x} \quad . \tag{5.21}$$

Se ha vuelto a obtener (5.12), pero esta vez con mucho menos trabajo. Este ahorro se demostrará mediante los cálculos del siguiente ejemplo.

Un arco de piedra en Lincoln

Entre las torres occidentales de la catedral de Lincoln, y justo encima de la bóveda de la nave, hay un ligero arco de piedra del siglo XIII con una luz de 8,54 m, figura 5.14. El arranque del lado norte del arco está unos 300 mm más bajo que el del lado sur, debido al parecer a un asiento. La flecha del arco, referida a la cuerda, es de 380 mm, según se midió en 1386. La sección transversal del arco es constante, prácticamente rectangular, de unos 500 mm de ancho y 280 mm de espesor. Los tímpanos del arco tienen hiladas de piedras, que contribuyen a la carga, pero que se supondrá que no tienen una función estructural. (La función del arco es desconocida; puede haber servido como punto de replanteo para la construcción de la nave en 1240–50.)

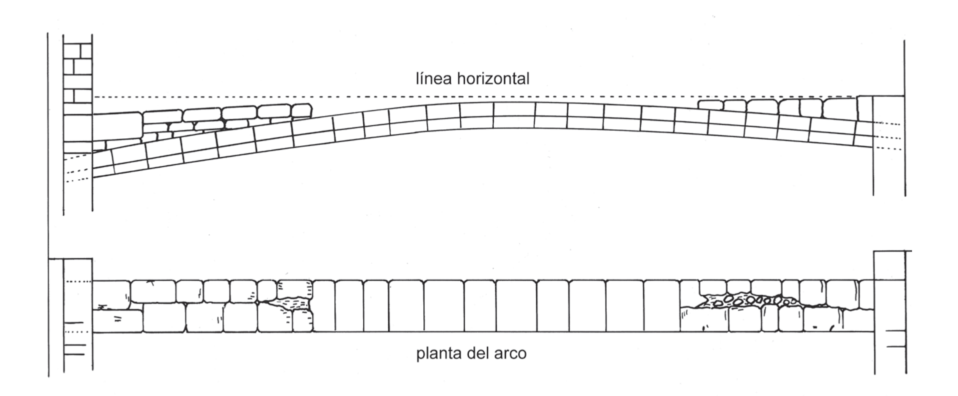


Figura 5.14 Arco de la catedral de Lincoln (Nicholson 1842)

En la figura 5.15 se ha dibujado la línea media del arco, multiplicando por 6 la escala vertical; puede verse que el arco tiene dos centros y es apuntado. Se muestra también en la figura 5.15 una posible línea de empujes para la combinación de peso propio del arco y carga sobre los riñones. Para dibujar esta línea de empujes de las cargas permanentes se ha dividido el arco en 14 segmentos de 0,61 m de longitud cada uno; la línea de empujes se ha situado lo más cerca posible de la línea media del arco. La distancia entre ambas líneas es de ±33 mm en las secciones 0, 3, 7 y 12 señaladas en la figura 5.15. Se puede concluir que un arco de la misma

forma que el arco real en Lincoln pero con un espesor de 66 mm contendría justo la línea de empujes de las cargas permanentes. El coeficiente geométrico de seguridad, sólo para la carga permanente, es por tanto 280/66=4,2.

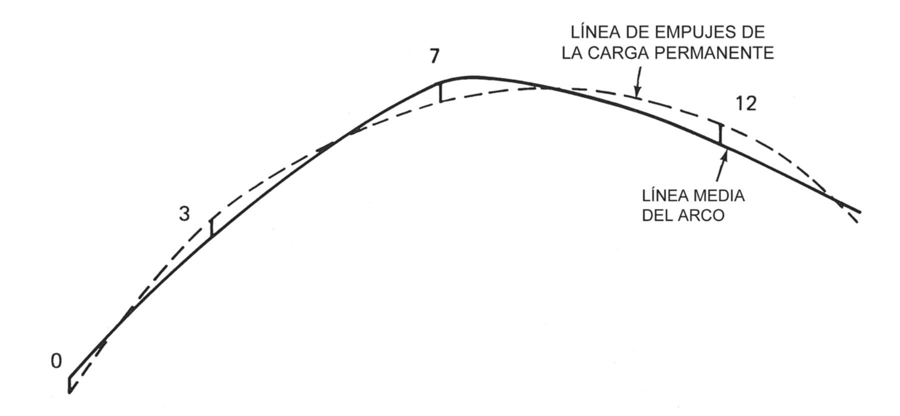


Figura 5.15

El análisis también da el valor de la componente horizontal del empuje en el apoyo, que es de 87 kN. El arco tiene una sección transversal de aproximadamente 0,14 m^2, de manera que la tensión media de compresión es de unos 0,62 N/mm^2. El arco es de piedra caliza oolítica con una resistencia a compresión de unos 15 N/mm^2. Las juntas de mortero entre las dovelas tendrán por supuesto una resistencia menor; sin embargo, el valor de trabajo de las tensiones de compresión medias parece satisfactorio.

En 1842 se observó que el arco vibraba perceptiblemente cuando se saltaba sobre él; era una práctica habitual de los visitantes probar de esta manera sus propiedades elásticas (todavía lo es). Por tanto, se estudiará a continuación el efecto de una carga puntual situada en cualquier lugar del arco.

La figura 5.16 (a) muestra una carga puntual unidad situada en un arco con el perfil de la línea de empujes de la carga permanente, y los cálculos se harán para determinar el valor del «momento plástico completo» correspondiente al colapso por la formación de las articulaciones mostradas. En la mesa de dibujo el problema a resolver es el de la figura 5.16(b), y está claro que el valor de *e* se puede encon-

trar muy fácilmente. Asociado a la línea de empujes de la figura 5.16(b) habrá un cierto empuje horizontal *T*, cuyo valor se puede obtener a partir de (5.19), figura 5.13; el producto *Te* da entonces el valor del momento plástico completo. Como la carga puntual cruza el arco, el mecanismo crítico puede cambiar al de las figuras 5.17(a) y (b), pero el análisis es igualmente directo.

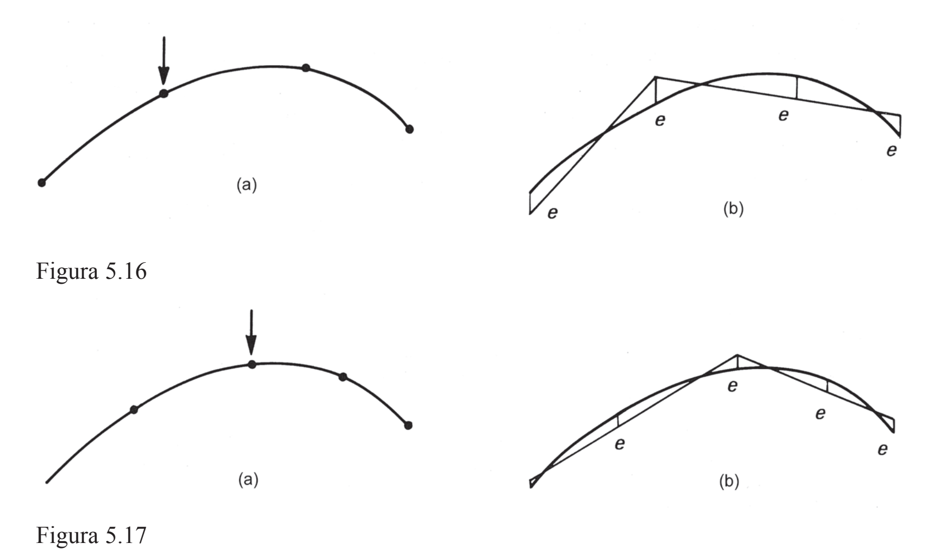


Figura 5.16

Figura 5.17

La figura 5.18 registra los resultados de los análisis realizados para 14 posiciones de una sobrecarga unidad. La peor posición de la carga es, como suele ser habitual, a un cuarto del vano; el diagrama es ligeramente asimétrico, y el mayor valor de M_p es 0,396 Nm para una carga de 1 N. Así, tomando una carga puntual de 2 kN (un hombre grande saltando en el arco), y usando el empuje básico en el apoyo de 87 kN, el efecto de la sobrecarga es desplazar la línea de empujes del peso propio una cantidad máxima ϵ, donde

$$(0{,}396)\ (2) = (\epsilon)\ (87) \quad ,$$

ó

$$\epsilon = 0{,}009 \text{ m} \quad . \qquad (5.22)$$

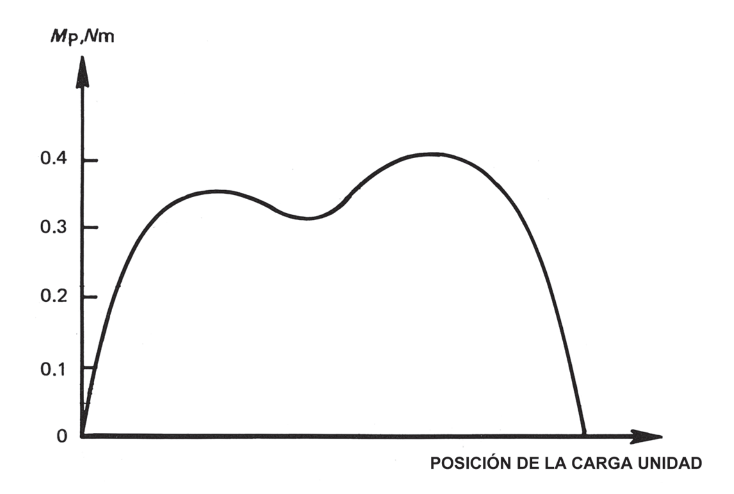


Figura 5.18

Esto significa que un arco de 18 mm de espesor con el perfil de la *línea a trazos* de la figura 5.15 contendría justo la línea de empujes resultante del peso propio en el arco de Lincoln, más la sobrecarga de 2 kN en su peor posición.

El espesor de 18 mm se suma simplemente al espesor de 66 mm encontrado previamente. Es decir, un arco de 84 mm de espesor con el perfil de la *línea continua* (es decir, el perfil real) de la figura 5.15 contendría justo la línea de empujes resultante de las cargas de peso propio y sobrecargas. De esta manera el coeficiente geométrico de seguridad de 4,2 sólo para el peso propio, se reduce para un hombre saltando en la posición más crítica a 280/84=3,3.

El puente Mosca en Turín

El puente Mosca sobre el Dora Riparia, Turín, se construyó en 1827 y tiene una luz de 45 m. Castigliano da detalles del puente, y unas tablas con los valores necesarios para un análisis similar al mostrado en la tabla 5.2. Como se mencionó en el capítulo 3, Castigliano estaba interesado en exponer sus teoremas, y trata el puente de Turín como un arco elástico con tres redundancias o incógnitas hiperestáticas, cuyos valores procede a calcular.

Castigliano demuestra que se puede estudiar un arco agrietado (es decir, un arco imperfectamente elástico) con sus métodos, y realiza varios cálculos alternativos para el puente de Turín. En el primero, supone una elasticidad perfecta para las juntas de mortero entre las dovelas, y obtiene un valor del empuje horizontal en el apoyo de 352.990 kg por metro lineal de ancho del puente. (Como se ha mencionado antes, (5.7), es preciso resolver las ecuaciones con una exactitud mayor que la de los propios datos.)

Realiza un segundo cálculo para una construcción en seco (juntas de mortero de espesor cero), y obtiene el valor de 324.710 kg para el empuje en el apoyo, un descenso del 8% respecto del anterior. Sin embargo, en esta solución la línea de empujes queda fuera del tercio central cerca de los arranques, de manera que la fábrica está parcialmente agrietada. (Castigliano señala la tendencia general de los arcos de poca flecha a separarse de sus apoyos cerca del trasdós; la línea de empujes se aproxima al intradós, con una posible sobretensión de la fábrica. Este tema se mencionará de nuevo en el capítulo 6.)

Un cálculo final considerando la fábrica parcialmente agrietada da un empuje de 333.960 kg.

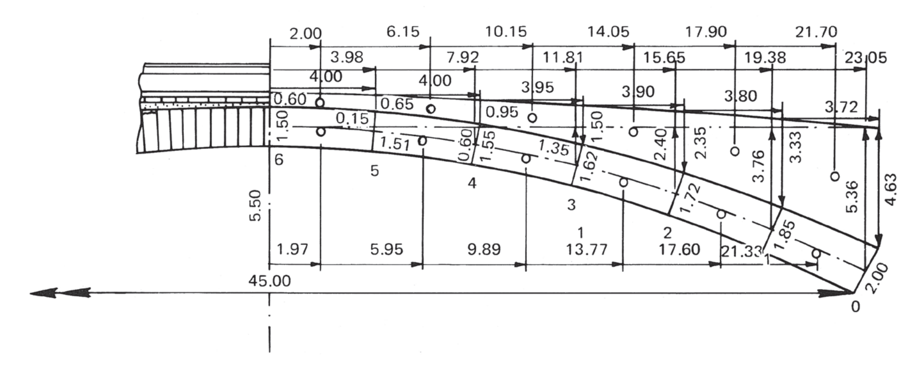


Figura 5.19 Castigliano (1879)

Como alternativa a estos cálculos, se determinará el coeficiente geométrico de seguridad. El dibujo de Castigliano se reproduce en la figura 5.19; el arco es simétrico, por lo que se puede considerar únicamente la mitad para determinar el efecto del peso propio. El espesor radial de las dovelas aumenta desde 1,50 m en la clave a 2,00 m en los arranques; el espesor *vertical* en los arranques es 2,23 m. Igual que

antes, el arco se imaginará reducido hacia la línea media hasta que la línea de empujes quede justo contenida dentro. En este límite habrá cinco secciones críticas, debido a la simetría del arco; estas secciones están situadas en los arranques y en la clave y cerca de los dos puntos a un cuarto de la luz (cf. figura 5.15 para el arco asimétrico de Lincoln). Durante el proceso de encogimiento del arco, el espesor relativo de la rosca del arco en las distintas secciones se mantendrá constante.

Castigliano divide la mitad del arco en seis partes, figura 5.19. Si se toma el origen en la clave, en vez de en los arranques (cf. figura 5.1), el proceso se simplifica; usando la notación de (5.2), y con $V = 0$ por simetría, las ecuaciones para la distancia vertical entre la línea de empujes y la línea media del arco son

$$\left.\begin{array}{lrl} \text{6(coronación)} & -\epsilon = \Delta & , \\ 3 & 1{,}20\,\epsilon = \Delta + 2{,}40 - \dfrac{1}{H}\,(800\,470) & , \\ \text{0(arranque):} & -1{,}49\,\epsilon = \Delta + 5{,}36 - \dfrac{1}{H}\,(2\,021\,937) & . \end{array}\right\} \qquad (5.23)$$

En la tercera de estas ecuaciones, por ejemplo, el valor $1{,}49\epsilon$ incluye el cociente 2,23/1,50 de los espesores verticales del arco en los arranques y en la clave; de esa forma, la distancia vertical ϵ de la línea de empujes queda referida al espesor real de 1,50 m en la clave. La sección 0 está 5,36 m por debajo de la sección 6 (el origen); el valor 2.021.937 kgm se ha tomado de las tablas de Castigliano.

La solución de las ecuaciones (5.23) da $\epsilon = -\Delta = 0{,}116$ m y $H = 373.000$ kg; esta última cifra es alrededor de un 5% superior al valor elástico de Castigliano. El coeficiente geométrico de seguridad frente a las cargas permanentes es de (1,50)/(2)(0,116)=6,5.

La mayor tensión media en el arco se produce en la clave, donde su valor es 373/1,5 = 249 t/m^2 ó 2,5 N/mm^2 (el valor correspondiente en los arranques es 438/2,0 = 219 t/m^2 ó 2,2 N/mm^2). El granito (del que está hecho la rosca) tiene una resistencia típica entre 5.000 y 18.000 t/m^2 (50–180 N/mm^2), y el coeficiente nominal de seguridad de las tensiones parece estar bien por encima de 20.

La línea de empujes del peso propio se sustituye ahora por la línea media real del arco con el objetivo de calcular el efecto de la sobrecarga. De nuevo es mejor utilizar un método gráfico, y la posición crítica de la línea de empujes se muestra (esquemáticamente, escala vertical ×4) en la figura 5.21. Las excentricidades *e* de

esta línea de empujes no son constantes; los valores e_1, etc. son proporcionales al espesor vertical del arco en cada una de las secciones. En la figura 5.20 se presentan los resultados finales; el mayor valor de M_p es de 1,72 tm para una carga unidad (una tonelada). Así, tomando una sobrecarga de 10 t por metro de anchura del puente, el valor de M_p es 17,2 tm. El empuje horizontal básico en el apoyo es de 373 t, y la excentricidad de la sobrecarga, referida como antes al espesor de la clave, es por tanto de 17,2/373 = 0,046 m. Añadiendo el valor 0,116 m de la excentricidad de las cargas permanentes, el coeficiente geométrico de seguridad se reduce a (1,50)/(2×0,162) = 4,6 para este caso particular de sobrecarga.

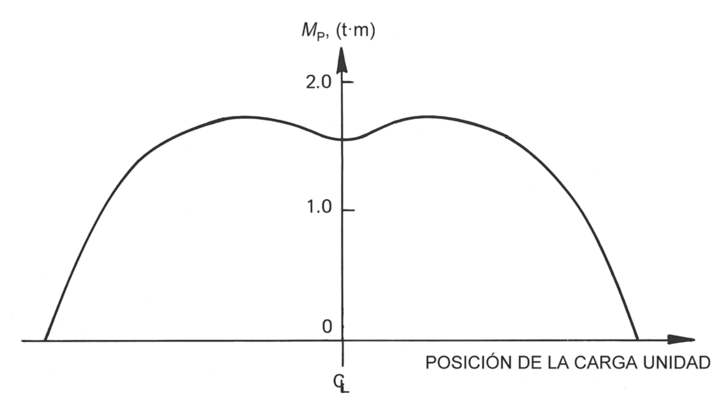


Figura 5.20

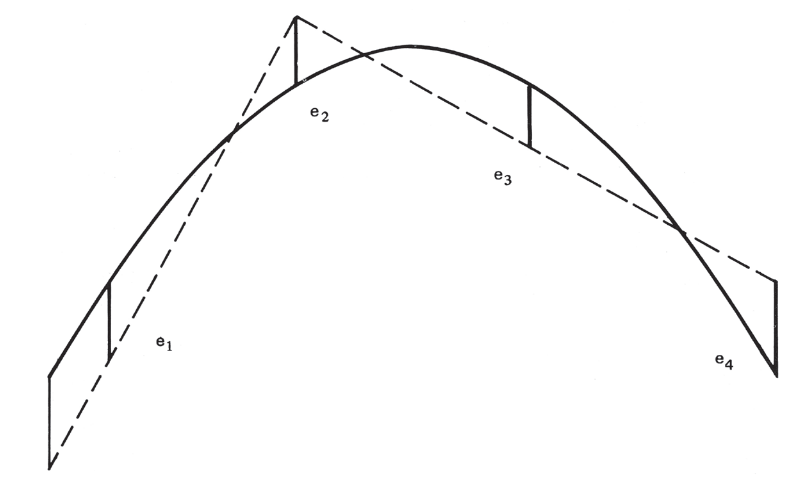


Figura 5.21

6
Arcos de hierro

El hierro fundido es un material que, como la piedra, es fuerte en compresión pero débil a tracción. Si la experiencia ha demostrado que un tipo particular de estructura de piedra es satisfactoria, no parece haber razón por la que una estructura de la misma forma no sea igualmente satisfactoria en hierro fundido. De hecho, la construcción de puentes en hierro puede tener sus ventajas, sobre todo por la reducción del peso propio y la consiguiente reducción del empuje sobre los apoyos.

Ciertamente, los puentes de hierro fundido, y más tarde de hierro forjado, estuvieron muy de moda desde los primeros años del siglo XIX en adelante, y muchos de ellos se construyeron imitando el arco de fábrica. Había, sin embargo, diferencias. En primer lugar, el cañón continuo de fábrica formado por roscas de dovelas se ve reemplazado por «dovelas» de hierro fundido, en realidad marcos de sección en caja, o por nervios individuales de hierro paralelos, arriostrados entre sí para dar estabilidad lateral a toda la estructura. En segundo lugar, la construcción convencional de un puente de fábrica, normalmente (pero no siempre), implica la construcción de tímpanos para contener los rellenos no estructurales que soportan la calzada. En los puentes de hierro existe la posibilidad de conectar la calzada con el arco por medio de entramados abiertos de hierro.

Los perfiles y dimensiones de estos nuevos arcos de hierro se proyectaron utilizando la teoría establecida para el arco de fábrica. En particular, la forma del arco podía comprobarse con la línea de empujes de la carga considerada. No obstante, hay una diferencia evidente entre el proyecto de los arcos de fábrica y de hierro. El sólido cañón continuo del arco de fábrica está sujeto a bajas tensiones y, con las comprobaciones finales de los niveles de tensión reales, un enfoque «geométrico»

del cálculo, como el descrito a lo largo de este libro, es válido. Por el contrario, el cañón del puente en arco de hierro, ya esté formado por «dovelas» huecas o por nervios individuales, está vacío en gran parte, y los niveles de tensión en los miembros principales representarán una fracción significativa de la resistencia a rotura del material. Ya no se puede suponer que la relación entre la tensión de rotura y la de trabajo sea tan grande como para considerar que el material es infinitamente resistente; por el contrario, es esencial que el proyectista haga alguna estimación de la resistencia del puente con referencia a la resistencia a rotura del material.

No es sorprendente, por lo tanto, encontrar un interés temprano (por ejemplo, el de Tredgold en el decenio de 1820) en el cálculo de la resistencia de los elementos de hierro. Lo que se necesitaba, para el análisis de un nervio arqueado de hierro, era una comprensión de la forma en que este nervio respondería a un empuje excéntrico. Se estaban desarrollando métodos elásticos que podían utilizarse para tratar este tipo de problemas, y suele atribuirse a Navier el mérito de haber dado el primer análisis correcto del comportamiento a flexión de una sección transversal en 1826. (De hecho, Navier no había comprendido del todo el papel de los ejes principales en la flexión de secciones asimétricas, y Tredgold cometió un error similar.)

La teoría elástica avanzaba, entonces, en un momento en que la ingeniería de la construcción podía hacer uso de sus hallazgos, y se desarrolló toda la ciencia de la «resistencia de materiales», que se ocupa del comportamiento local de los distintos miembros en respuesta a una carga dada. Era inevitable que los métodos elásticos también llegaran a utilizarse para estudiar el comportamiento general de la estructura; es decir, la posición de la línea de empujes en un arco hiperestático se podría determinar mediante los nuevos principios elásticos, por ejemplo, mediante el uso de los teoremas de Castigliano. En el capítulo 4 se vio que Pippard se basó en esta misma teoría elástica en sus estudios sobre el arco en el siglo XX.

Sin embargo, no hay ninguna necesidad de emplear el mismo tipo de teoría para dos tipos de análisis muy diferentes. Por un lado, debe determinarse el estado general de equilibrio, y esto es un problema de la «teoría de las estructuras». Este análisis conducirá a una estimación de las fuerzas estructurales internas. El segundo paso, calcular las secciones transversales locales para resistir esas fuerzas, es un problema de la «resistencia de materiales».

El proyectista debe determinar el estado general de su estructura lo mejor que pueda; la teoría elástica dará sólo uno del infinito número de estados de equilibrio

posibles. El uso de la regla del «tercio central», o, lo que es exactamente equivalente, de un coeficiente geométrico de seguridad, es una forma alternativa, que no implica conceptos elásticos, de obtener un conjunto de fuerzas estructurales primarias. Para el puente de fábrica, la idea de un arco de espesor mínimo que sólo contenga la línea de empujes conduce, en cierto sentido, a la obtención del estado de equilibrio más favorable; el procedimiento es, en cualquier caso, «seguro», como lo demuestran los teoremas plásticos .

La determinación de un estado general de equilibrio suele ser todo lo que se necesita para el cálculo de un arco de fábrica, aunque hay que hacer una pequeña excursión al campo de la resistencia de materiales para asegurarse de que las tensiones son realmente bajas, como se ha supuesto. Por otra parte, en el caso del arco de hierro fundido, en la segunda etapa de los cálculos deben utilizarse el empuje y el momento flector que actúan en cualquier sección transversal, cuyos valores se han encontrado mediante el uso de la teoría de estructuras; a partir de éstos hay que calcular los valores resultantes de las tensiones en la sección transversal. Estos cálculos de esta segunda etapa pueden ser elásticos, aunque no es necesario que lo sean. Si el material del arco fuera un acero dúctil, entonces los cálculos podrían referirse a momentos plásticos completos. Lo mismo sucede con el hierro forjado; este material tiene suficiente ductilidad para hacer uso de la teoría plástica. No obstante, en los dos ejemplos que siguen y que ilustrarán el proceso de análisis de los arcos de hierro, se citan las tensiones elásticas.

El puente Magdalene en Cambridge

Como se ha indicado en la sección anterior de este capítulo, las conclusiones sobre la resistencia de los arcos de hierro fundido deben alcanzarse con cierto cuidado. La naturaleza frágil del material puede impedir el comportamiento estructural esencialmente dúctil que está en el corazón de los teoremas plásticos. En concreto, puede que no sea posible confiar en el desarrollo de ningún valor supuesto de tensión de tracción; si una sección particular ha sido sobrecargada en algún momento, entonces el material puede haberse fracturado, y no se pueden desarrollar tensiones de tracción en absoluto. No hay ningún problema a este respecto con el arco de fábrica; el comportamiento de las articulaciones entre las

dovelas genera la necesaria ductilidad estructural, y el teorema de la seguridad sigue siendo válido.

Para un material frágil no se puede dar una seguridad tan absoluta en los mismos términos. Esta advertencia no se refiere a la utilización de los teoremas plásticos; es la estructura hecha con un material frágil la que está bajo sospecha, y no los métodos utilizados para analizarla. Esta incapacidad de proporcionar una base adecuada para los teoremas plásticos pone de relieve la importancia de la elección del material en el proyecto de estructuras, ya sea el análisis elástico o plástico. Las consecuencias de esta visión de una estructura frágil pueden ilustrarse con referencia a un puente real.



Figura 6.1 Puente Magdalene en Cambridge; Arthur Browne, 1823

El puente Magdalene, construido en 1823, tiene ocho nervios elípticos de hierro fundido de 45 pies (unos 15 m) de luz, figura 6.1. Cada uno de los nervios tiene la sección transversal idealizada de la figura 6.2, en la que las dimensiones principales (en milímetros) son las mismas que las del nervio real, pero, para facilitar el cálculo, el contorno real ligeramente más complejo ha sido sustituido por bloques rectangulares. Los nervios están espaciados unos 4 pies (1,20 m) de distancia entre

sí, y las chapas de hierro fundido se extienden entre los salientes de la parte inferior de los nervios, de modo que el puente presenta un intradós elíptico de chapas de hierro. Sobre estas chapas de hierro se colocan tierra y escombros (algunos ahora reemplazados por hormigón) para formar un relleno del tipo convencional que sostiene la calzada. En 1981–82 se realizaron trabajos de rehabilitación.

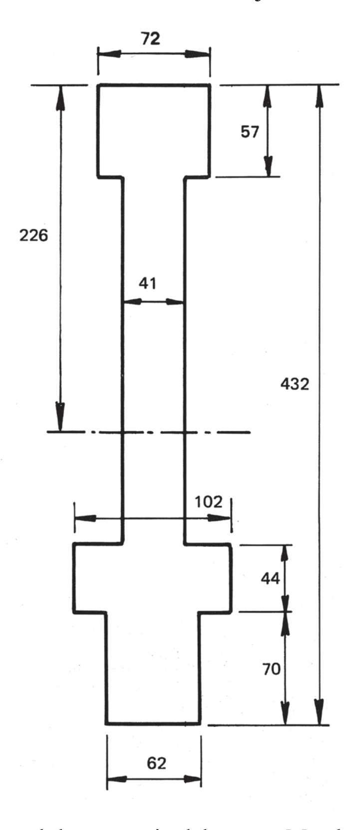


Figura 6.2 Sección transversal de un nervio del puente Magdalene, Cambridge

Para la evaluación del puente antes de estos trabajos, se consideró una tensión de rotura a compresión de la fundición de unas 40 ton/pulgada^2 y a tracción de unas de 10 ton/pulgada^2; en consecuencia, las tensiones admisibles de trabajo se fijaron en 10 ton/pulgada^2, y 3 ton/pulgada^2, respectivamente, o alrededor de 155 N/mm^2 y 46 N/mm^2. La figura 6.3(a) muestra el perfil de un nervio en arco, y también una línea de empujes para la carga permanente combinada con la sobrecarga

más desfavorable. Se verá que en la «sección critica» marcada (la sección con tensiones más altas en el nervio bajo la carga dada) la línea de empujes se sale por debajo del intradós del arco; esto es, por supuesto, permisible para un material capaz de soportar tracciones. Sin embargo, las tensiones en la sección crítica se calcularon como 115 N/mm² en compresión y 69 N/mm² en tracción, y esta última cifra es un 50% más alta que el valor admisible de 46 N/mm².

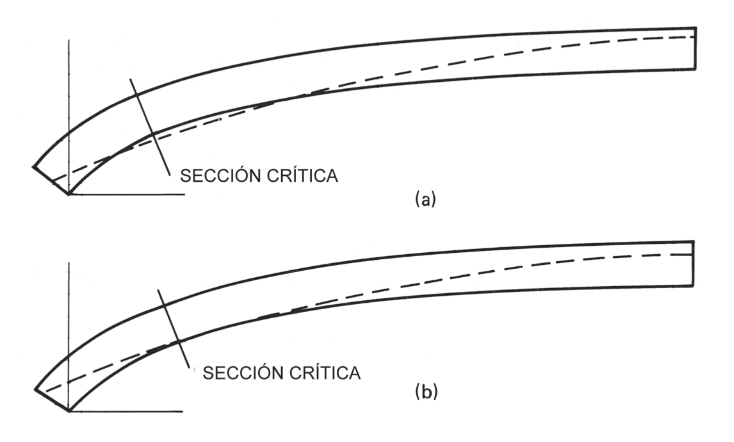


Figura 6.3

Ahora bien, la posición de la línea de empujes en la figura 6.3(a) se calculó tratando el arco como una estructura triarticulada estáticamente determinada. La «articulación» en el centro del arco es una idea razonable; la conexión allí está hecha con un sistema de cuñas y abrazaderas, que definen bastante bien la posición en la sección transversal por la que se transmite el empuje entre las dos mitades del nervio. Sin embargo, en los arranques, los nervios se asientan sobre una placa que recorre todo el ancho del puente, y se desconoce la naturaleza exacta de la conexión. Si hay un contacto continuo en todo el espesor del nervio entre éste y la placa, y entre la placa y el apoyo, entonces la línea de empujes podría pasar por cualquier lugar dentro del espesor del nervio. En el análisis «isostático» que conduce a la figura 6.3(a), la «articulación» en el apoyo se tomó arbitrariamente en el centro de la sección transversal, de manera que un esfuerzo de compresión uniforme actúa sobre todo el espesor del nervio en el arranque.

La figura 6.3(b) muestra los resultados de un segundo análisis para las mismas cargas, en el que la «articulación» del apoyo se ha colocado unos 150 mm por encima del centro de gravedad de la sección. Tanto las tensiones de compresión como las de tracción en la sección crítica se han reducido, a 97 y 45 N/mm² respectivamente y la tensión de tracción se ha reducido hasta estar justo por debajo del valor admisible.

Así, si la línea de empujes de la figura 6.3(b), que representa una primera etapa en la evaluación del puente, fuera la línea correcta, las correspondientes tensiones elásticas que surgen en la sección de mayor tensión serían satisfactorias. Ahora bien, se desconocen las condiciones reales de los apoyos, por lo que no es posible decidir si la línea de empujes de la figura 6.3(b) es más «correcta» que la de la figura 6.3(a), o viceversa. No se trata de un asunto de mera ignorancia; como se señaló en el capítulo 2, incluso si se dispusiera de información sobre la conexión precisa de la costilla del arco con su arranque, el paso del tiempo, que implica desplazamientos y asentamientos de la estructura, haría que esa información perdiera sentido. Si el teorema de la seguridad fuera válido, no sería necesario elegir entre los estados alternativos que se muestran en las figuras 6.3(a) y (b). Las tensiones correspondientes a la línea de empujes de la figura 6.3(b) son satisfactorias, y esto zanja la cuestión; el arco no puede colapsar bajo la carga dada.

Sin embargo, la línea de empujes podría de hecho caer hasta la posición mostrada en la figura 6.3(a), o más abajo. En la práctica, cualquier apertura de los estribos de un puente dará lugar a una reducción del valor del empuje sobre el apoyo y a un descenso correspondiente de la línea de empujes en los arranques de los arcos. Como se ha dicho en el capítulo 5, Castigliano observó esta tendencia a la caída de la línea de empuje y, de hecho, propuso redondear los extremos de los nervios, para proporcionar un apoyo fijo en un punto determinado de la sección transversal. Los arcos del puente Magdalene podrían ser forzados a estar en un estado inequívocamente satisfactorio si, separándolos mediante un gato de sus arranques, se insertaran articulaciones que correspondieran a la posición de la línea de empujes de la figura 6.3(b).

Podría pensarse que este procedimiento contradice el sentido común; la conversión de una estructura redundante en una estructura isostática no puede mejorar su resistencia. Este punto de vista, de sentido común, puede sostenerse ciertamente para cualquier estructura dúctil, a la que se puede aplicar el teorema de la seguridad.

Una vez más, sin embargo, lo que es sospechoso es la estructura hecha de material frágil. Lo que podría suceder en la práctica es que la línea de empujes para el arco redundante podría realmente caer hasta una posición en la que el hierro se agrieta en el trasdós; la línea se elevaría entonces de inmediato a una posición que se corresponde más estrechamente con la de la figura 6.3(b). Sin embargo, es posible que el nervio del arco en su nuevo estado agrietado no sea capaz de acomodar en su espesor la nueva posición de la línea de empujes y, hasta que esto no se haya comprobado (y se hayan verificado los niveles de las tensiones de compresión) no se puede dar ninguna garantía sobre el estado del nervio.

La seguridad completa de los arcos hiperestáticos de hierro fundido se puede garantizar si se imagina que están agrietados en toda su longitud. Es decir, se podría pensar que el arco de la figura 6.3 está formado por «dovelas» que imitan el arco de fábrica, y que no pueden aceptar tensiones de tracción en ninguna sección. Si tal arco se analizara con los métodos de los capítulos anteriores de este libro, y se encontrara satisfactorio, y si además se verificaran los niveles de tensión de compresión, entonces se obtendría la seguridad necesaria.

Como alternativa, la provisión de articulaciones en los apoyos (y de otra articulación en la clave si fuera necesario) haría que el arco de hierro fundido se volviera isostático, sin ambigüedad alguna en la posición de la línea de empujes. El arco ya no estaría sujeto a los caprichos del entorno, y el analista podría tener una garantía razonable de que las tensiones calculadas no se superarían en la práctica. Todas estas dificultades se deben a la naturaleza frágil del hierro fundido (que puede tener en la práctica una mayor reserva de ductilidad, aunque sea pequeña, de lo que se supone).

Las dificultades desaparecen con el uso del hierro forjado, que ciertamente tiene suficiente ductilidad a tracción para que no se produzca la fractura.

Un puente de hierro forjado

La figura 6.4 muestra esquemáticamente (pero basándose en un puente real) el vano central (de 27,4 m) de un puente de carretera de hierro forjado. Las vigas superiores que sostienen la calzada y las vigas que forman los arcos están construidas por chapas en el alma y angulares y chapas en las alas, sólidamente roblonados; las vigas de la calzada y las del arco se unen cerca del tramo central. El trabajo «deco-

rativo» en hierro de los tímpanos sirve para transmitir las cargas de las vigas de la calzada a los arcos. Si el puente se ve de esta manera, las cargas de la calzada se transmitirán a los arcos curvos, y estos pueden ser analizados por las técnicas de línea de empujes. Para este puente en particular, todas las combinaciones de cargas permanentes y sobrecargas produjeron tensiones dentro de los límites admisibles; el puente demostró, de hecho, ser satisfactorio.

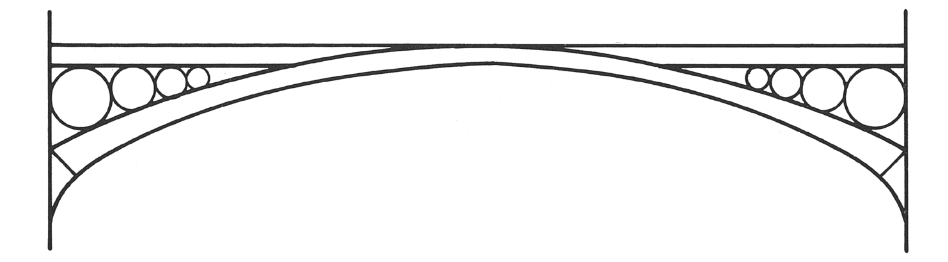


Figura 6.4 Diagrama esquemático de un puente de hierro forjado.

Sin embargo, un análisis elástico convencional no dio esta visión directa. Fue fácil adaptar un programa de ordenador de cálculo elástico para el análisis; el arco fue idealizado como un conjunto de elementos que tienen en cada punto las propiedades de sección del arco. De este modo se pudo investigar un gran número de casos de carga y tabular los peores valores de las tensiones de compresión y tracción de la forma habitual.

Además de varias combinaciones de cargas permanentes y sobrecargas, se consideraron otros dos casos de «carga». El primero de ellos fue un estudio de los efectos de la variación de la temperatura. El segundo es el resultado de un defecto observado en el puente; uno de los pilares del río se ha inclinado en algún momento, y el vano principal de 27,4 m ha aumentado al nivel de la calzada en unos 13 mm.

Cuando se tuvieron en cuenta estos diferentes casos de carga, se comprobó que la peor tensión de tracción en cualquier sección del puente era de 309 N/mm^2. De este total, 57 N/mm^2 se debían a la combinación más desfavorable de carga permanente y sobrecarga, 114 N/mm^2 se debían a la contracción al cambiar la temperatura, y 138 N/mm^2 se debían a la rotación del pilar del río. La tensión

admisible de tracción se había fijado en 120 N/mm², por lo que el total de 309 N/mm² superaba considerablemente este valor.

Las magnitudes relativas de algunas de estas cantidades pueden comprobarse mediante cálculos sencillos. Un aumento de 13 mm en un tramo de 27,4 m representa una deformación unitaria de, aproximadamente, $0{,}5\times10^{-3}$; si esta tensión se absorbe elásticamente en el hierro, la tensión de tracción correspondiente es de unos 100 N/mm². De forma análoga, una variación de temperatura de ± 30°C llevaría a una deformación de aproximadamente $\pm\,0{,}4\times10^{-3}$, y la tensión elástica correspondiente sería también del orden de ±100 N/mm². Ahora bien, tanto las deformaciones por la temperatura como las deformaciones debidas al aumento de la luz conducen a tensiones auto-equilibradas. Resulta sencillo valorar cualitativamente la naturaleza de estas tensiones; ni la variación de la temperatura ni el desajuste de la luz darán lugar a tensiones en una estructura isostática (por ejemplo, un arco triarticulado con la misma geometría que el que se está considerando). Una estructura hiperestática, sin embargo, es capaz de soportar tensiones en ausencia de carga externa; de hecho, se encontrará inevitablemente en ese estado. Los elementos roblonados entre sí que conforman el puente de la figura 6.4 habrán sido forzados a unirse, hasta cierto punto, durante la construcción, y es de notar que tales tensiones desconocidas de montaje serán ignoradas en cualquier cálculo elástico.

De hecho, es seguro, por los teoremas plásticos, ignorar tales tensiones; no pueden tener ningún efecto en la capacidad de carga final de una estructura dúctil. De manera similar, la tensión de temperatura de 114 N/mm² , y la tensión de 138 N/mm² debida a la rotación del pilar del río, surgen sólo porque el arco es estáticamente indeterminado; no pueden afectar la resistencia final del puente. Del total de la peor tensión de tracción de 309 N/mm², sólo 57 N/mm² se deben a la carga; las otras contribuciones surgen de una «falta de ajuste» exactamente igual que los defectos de montaje.

Son los argumentos sobre las pequeñas imperfecciones los que son vitales, como se vio en el capítulo 2, y no los cálculos de las magnitudes de las tensiones autoequilibradas resultantes. Tales imperfecciones (como la inclinación de una pila en el río) pueden ser muy evidentes al examinar de cerca la estructura, y pueden llevar a deformaciones muy grandes y visibles del hierro forjado, o a la separación de dovelas en un arco de fábrica. Sin embargo, estas grandes deformaciones y estas grietas no serán visibles si el ingeniero toma una visión más

lejana de su estructura; la geometría del puente es virtualmente inalterable. El desplazamiento de un pilar llevará al agrietamiento de un arco de fábrica. El estado agrietado es el estado natural de la fábrica, pero su resistencia final no se ve afectada por tales defectos naturales e inevitables.

Bibliografía

General

Hopkins, H. J. (1970). *A span of bridges*. Newton Abbot: David and Charles.

Ruddock, Ted. (1979). *Arch bridges and their builders 1735–1835*. Cambridge: Cambridge University University Press.

Capítulo 1

Fuller, G. (1875). «Curve of equilibrium for a rigid arch under vertical forces», *Minutes and Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 40: 143–149.

Inglis, C. (1951). *Applied mechanics for engineers*. Cambridge: Cambridge University Press.

Capítulo 2

Heyman, J. (1971). *Plastic design of frames. Volume 2: Applications*. Cambridge: Cambridge University Press.

Heyman, J. (1969). «The safety of masonry arches», *International Journal of Mechanical Sciences* 11: 363–385.

Heyman, J. (1966). «The stone skeleton», *International Journal of Solids and Structures* 2: 249–279.

Kooharian, A. (1953). «Limit analysis of voussoir (segmental) and concrete arches», *Proceedings of the American Concrete Institute* 49: 317–328.

Capítulo 3

Barlow, W. H. (1846). «On the existence (practically) of the line of equal horizontal thrust in arches, and the mode of determining it by geometrical construction», *Minutes and Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 5: 162–182, láms. 1–6.

Bélidor, B. F. de. (1729). *La science des ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification et d'architecture civile*. París.

Boistard, L. C. (1810). «Expériences sur la stabilité des voûtes». In: Lesage, *Recueil de divers mémoires* 2: 171–217, láms. 11–16.

Castigliano, C. A. P. (1879). *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. Turín: Augusto Federico Negro. Traducido por Ewart S. Andrews. 1919. *Elastic stresses in structures.* Londres: Scott, Greenwood and Son. Reimpreso con una introducción de G. AE. Oravas.1966. *The theory of equilibrium of elastic systems and its applications*. Nueva York: Dover.

Coulomb, C. A. (1773). «Essai sur une application des règles de maximis & minimis à quelques problèmes de statique, relatifs a l'architecture», *Mémoires de Mathématique & de Physique, présentés a l'Académie Royale des Sciences par divers Savans* 7: 343–382.

Couplet, P. (1729, 1730). «De la poussée des voûtes». *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, 79–117, 117–141.

Danyzy, A. A. H. (1732) (Lyon 1778). «Méthode générale pour déterminer la résistance qu'il faut opposer a la poussée des voûtes», *Histoire de la Société Royale des Sciences établie à Montpellier* 2: 40–56.

Derand, François. (1643). *L'architecture des voûtes*… París. (Nouvelle édition, révue et corrigée, París, 1743).

Frézier, A. F. (1737–39. *La théorie et la pratique de la coupe des pierres*… 3 vols. Estrasburgo y París.

Gauthey, E. M. (1809, 1813). *Traité de la construction des ponts*, editado por C. L. M. H. Navier, 2 vols. París.

Gautier, H. (1717). *Dissertation sur l'épaisseur des culées des ponts*… París.

Gil de Hontañón, Rodrigo (c. 1500–1577). Inserto en *Compendio de Arquitectura*... (Simón García 1681) editado y publicado por E. Mariátegui en *El arte en España* 7: 113–27, 154–84, 193–217. Madrid, 1868. [ed. facsímil con transcripción en 2 vols. Valladolid: Colegio Oficial de Arquitectos de Valladolid, 1991].

Gregory, D. (1697). «Catenaria», *Philosophical Transactions* n° 231: 637–652.

Heyman, J. (1972). *Coulomb's memoir on statics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Heyman, J. (1976). «Couplet's engineering memoirs, 1726–33», *History of Technology* 1: 21–44.

Hooke, R. (1676) (sic, 1675). *A description of helioscopes, and some other instruments*. Londres.

Jenkin, H. C. F. (1876). «Artículo 'Bridges'». En: *Encyclopaedia Britannica, 9th edition*. Edinbourgh: Adam and Charles Black, vol. 2: 284–341.

La Hire, P. de. (1695). *Traité de Mécanique*. París.

La Hire, P. de. (1712). «Sur la construction des voûtes dans le édifices», *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*: 69–77.

Lamé, M. G. y E. Clapeyron. (1823). «Mémoire sur la stabilité des voûtes», *Annales des Mines* 8: 789– 836.
Lesage, P. C. (1810). *Recueil de divers mémoires extraits de la Bibliothèque Impériale des Ponts et Chaussées a l'usage de MM. les ingénieurs*. 2 vols. París.
Moseley, H. (1843). *The mechanical principles of engineering and architecture*. Londres.
Navier, C. L. M. H. (1833). *Resumé des leçons données a l'Ecole des Ponts et Chaussées, sur l'application de la mécanique a l'établissement des constructions et des machines*, 2ª edición. París.
Pippard, A. J. S., E. Tranter y L. Chitty. (1936). «The mechanics of the voussoir arch», *Journal of the Institution of Civil Engineers* 4: 281–306.
Pippard, A. J. S. y R. J. Ashby. (1938). «An experimental study of the voussoir arch», *Journal of the Institution of Civil Engineers* 10: 383–404, láms. 9–10.
Pitot, H. (1726). «Examen de la force qu'il faut donner aux cintres dont on se sert dans la construction des grandes voûtes des arches des ponts, &c.», *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*: 216–236.
Poleni, G. (1748). *Memorie istoriche de la gran cupola del Tempio Vaticano*. Padua.
Prony, R. de. (1802). *Recherches sur la poussée des terres, et sur la forme et les dimensions à donner aux murs de revêtement*. París, *An* X [1802]
Séjourné, P. (1913–16). *Grandes voûtes*, 6 vols. Bourges.
Stirling, J . (1717). *Lineae Tortii Ordinis Neutonianae*. Oxford.
Timoshenko, S. P. (1953). *History of strength of materials*. New York: McGraw-Hill.
Truesdell, C. (1960). *The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638–1788,* Introducción a *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, 2nd series, vol 11(2). Zúrich.
Ware, S. (1809). *A treatise of the properties of arches, and their abutment piers*. Londres.
Yvon Villarceau, A. (1854). «L'établissement des arches de pont», *Institut de France, Académie des Sciences, Mémoires présentés par divers savants* 12: 503–822.

Capítulo 4

Heyman, J. (1980). «The estimation of the strength of masonry arches», *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 69, Part 2: 921–937.
Military Engineering Experimental Establishment (1952). *Classification of masonry arch bridges*. Christchurch (MEXE).
Ministry of Transport (1967). *The assessment of highway bridges for construction and use vehicles*. Tech. Memo. (Bridges) BE4, Londres, Ministry of Transport; ibid. Tech. Memo. (Bridges) BE3/73, 1973.
Pippard, A. J. S. y J. F. Baker. (1943). *The analysis of engineering structures*, 2ª edición. Londres: Edward Arnold.
Pippard, A. J. S. (1948). «The approximate estimation of safe loads on masonry bridges», *Civil engineer in war* 1: 365–372. (Londres, The Institution of Civil Engineers.)

Capítulo 5

Heyman, J., N. B. Hobbs y B. S. Jermy. (1980). «The rehabilitation of Teston bridge», *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 68: 489–497.

Nicholson, W. A. (1842). «Report on the construction of a stone arch between the west towers of Lincoln Cathedral», *Transactions of the Royal Institute of British Architects* 1, Part II: 180–183.

Papworth, J. B. (1842). «A suggestion referring to the stone arch at Lincoln Cathedral», *Transactions of the Royal Institute of British Architects* 1, Part II: 184–185.

Capítulo 6

Morgan, S. K. y T. J. Heathorn. (1981). «A study of the design and construction and a structural analysis of Magdalene Bridge, Cambridge», *The Structural Engineer* 59A: 255–262.

Tredgold, T. (1824). *Practical essay on the strength of cast iron…*, 2ª edición. Londres.

Índice alfabético

Textos de Teoría e Historia de las Construcciones
Colección dirigida por Santiago Huerta

A. Buchanan et al. *Willis. Science, Techn., Architecture*
A. Choisy. *El arte de construir en Roma*
A. Choisy. *El arte de construir en Bizancio*
A. Choisy. *El arte de construir en Egipto*
A. Choisy. *Historia de la arquitectura* (en preparación)
P. Fuentes, I. Wouters. *Brick vaults and Beyond*
I. J. Gil Crespo. (Ed.). *Construcción fortificada*
J. Girón, S. Huerta. *Choisy. L'architecture, l'art de bâtir*
R. Guastavino. *La construcción cohesiva*
J. Heyman. *Análisis de estructuras: historia*
J. Heyman. *El arco de fábrica*
J. Heyman. *El esqueleto de piedra*
J. Heyman. *Equilibrio de cáscaras* (en preparación)
J. Heyman. *Geometry& Mechanics of Historic Structures*
J. Heyman. *La ciencia de las estructuras*
J. Heyman. *Teoría básica de estructuras*
J. Heyman. *Estructuras de fábrica.* 2 vols.
J. Heyman. *Vigas y pórticos*
S. Huerta. *Arcos, bóvedas y cúpulas*
S. Huerta (Ed.). *Bóvedas de Guastavino en América*
S. Huerta (Ed.). *History of the Theory of Structures*
JM. Molero et al.(Ed). *Construcción fortificada medieval*
J. Monasterio. *Empuje de las bóvedas* (en preparación)
J.R. Perronet. *Construcción de puentes en el s. XVIII*
H. Straub. *Historia de la ingeniería* (en preparación)
H. Thunnissen. *Bóvedas: su construcción y empleo*
A. Truñó. *Construcción de bóvedas tabicadas*
E. Viollet-le-Duc. *La construcción medieval*
R. Willis. *Construcción de bóvedas en la Edad Media*

Actas Congresos Historia de la Construcción
I Congr. Nac. Historia de la Construcción (1996)
II Congr. Nac. Historia de la Construcción (1998)
III Congr. Nac. Historia de la Construcción (2000)
IV Congr. Nac. Historia de la Construcción (2005)
V Congr. Nac. Historia de la Construcción (2007)
VI Congr. Nac. Historia de la Construcción (2009)
VII Congr. Nac. Historia la Construcción (2011)
VIII Congr. Nac. Historia la Construcción (2013)
IX Con.Nac./I Int. Hisp.-Amer. Hist. Construcción (2015)
X Con.Nac./II Int. Hisp.-Amer. Hist. Construcción (2017)
III Congr.Int. Hisp-Amer. Hist. Construcción (2019)
Proc. 1st Int. Congr. on Construction History (2003)
II Jornadas Construcción Fortificada (2016)

ISBN: 978-84-9728-586-5

9 788497 285865